Radicali

L'espressione $\boxed{\sqrt[n]{a}}$ è comunemente detta radice ennesima di ***a***, e con essa si intende quel numero reale ***b*** tale che $b^n = a$.

La scrittura completa è detta anche **radicale assoluto** (o **aritmetico**) ed in essa $\sqrt{\ }$ è il simbolo della radice, ***n*** è l'indice della radice (n ≥ 2) ed ***a*** è il radicando ($a \geq 0$).

Ricordiamo che la radice di un numero è possibile (ha per soluzione un numero reale) solo se:

a) l'indice della radice è pari e il radicando è positivo;

b) l'indice della radice è dispari.

I radicali in cui *a* può essere negativo sono detti **radicali algebrici**; in tal caso dobbiamo considerare l'ipotesi che il numero sotto radice sia positivo o negativo, quindi: $\sqrt{a^2} = \pm a$.

Nella parte che segue tratteremo i radicali assoluti.

Riduzione di radicali

Poiché "il valore di un radicale non cambia se l'indice della radice e l'esponente del radicando si moltiplicano per lo stesso numero, o si dividono per un divisore comune", si può ridurre un radicale dividendo l'indice della radice e l'esponente del radicando per il loro M.C.D.

$$\sqrt[6]{a^2b^4} = \sqrt[6]{\left(ab^2\right)^2} = \sqrt[3]{ab^2}$$

Portar dentro e portar fuori radice un fattore

1) Quando un numero positivo (scritto anche in forma letterale) è moltiplicato ad un radicale, lo si può portare dentro radice, e moltiplicarlo per il radicando, dopo averlo elevato alla potenza uguale all'indice della radice.

$$2ab^2 \cdot \sqrt[3]{3b} = \sqrt[3]{2^3a^3b^6 \cdot 3b} = \sqrt[3]{24a^3b^7}$$

2) Un fattore del radicando che ha l'esponente multiplo dell'indice della radice può essere portato fuori dividendo il suo esponente per l'indice della radice.

$$\sqrt[3]{24a^6b^3c^5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3 \cdot a^6 \cdot b^3 \cdot c^3 \cdot c^2} = 2a^2bc\sqrt[3]{3c^2}$$

Se la radice è pari e la quantità letterale portata fuori radice diventa di indice dispari bisogna mettere a tale quantità il simbolo di valore assoluto $|\quad|$ (poiché non conosco il segno del numero).

Somma algebrica di radicali

La somma algebrica di due o più radicali è possibile, se e solo se, i radicali hanno indice della radice e radicando uguali; tali radicali si dicono **simili**. La somma algebrica di due o più radicali simili è un radicale simile a quelli dati con coefficiente uguale alla somma algebrica dei coefficienti (fattori eterni) dei singoli radicali.

$$\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = (1+5-2)\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \qquad ; \qquad 3\sqrt[3]{a^2} - 5\sqrt[3]{a^2} = -2\sqrt[3]{a^2}$$

$$3\sqrt{2} - 2\sqrt{5} \ \textit{non si sommano} \qquad ; \qquad \sqrt{5} + 4\sqrt[3]{5} \ \textit{non si sommano}$$

Prodotto di radicali

La moltiplicazione di due o più radicali e sempre possibile. Distingueremo due casi:

1) Radicali con lo stesso indice: Il prodotto di più radicali aventi lo stesso indice è uguale a un radicale che ha per indice lo stesso indice e per radicando il prodotto dei radicandi.

$$\sqrt{3a^2bc^5}\cdot\sqrt{5a^4b^3c}=\sqrt{15a^6b^4c^6}\quad \textit{e portando fuori}\ =a^3b^2c^3\sqrt{15}$$

2) Radicali con indice diverso: Se i radicali non hanno lo stesso indice, bisogna prima ridurli allo stesso indice (si trova il *m.c.m* degli indici e si ottengono i nuovi esponenti dei radicandi dividendo il nuovo indice della radice per la radice in questione e moltiplicando il risultato per l'esponente del radicando) e poi eseguire la moltiplicazione come nel caso precedente.

$$\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[5]{a^4}=\sqrt[15]{a^{10}}\cdot\sqrt[15]{a^{12}}=\sqrt[15]{a^{10}\cdot a^{12}}=\sqrt[15]{a^{22}}\quad \textit{e portando fuori}\ =a\sqrt[15]{a^7}$$

Quoziente di radicali

Per calcolare il quoziente di due radicali si seguono le stesse regole del prodotto di radicali con la differenza, ovviamente, che alla fine si eseguirà la divisione dei radicandi e non la moltiplicazione.

$$\sqrt{12a^3}:\sqrt{2a}=\sqrt{6a^2}\qquad ;\qquad \sqrt[3]{3x^2y^3}:\sqrt[4]{3xy^2}:=\sqrt[12]{3^4x^8y^{12}}:\sqrt[12]{3^3x^3y^6}=\sqrt[12]{3x^5y^6}$$

Elevamento a potenza di radicali

La potenza di un radicale si esegue elevando a potenza solo il radicando.

$$\left(\sqrt[3]{5a}\right)^2=\sqrt[3]{25a^2}\qquad ;\qquad \left(\sqrt{3x}\right)^3=\sqrt{27x^3}=3x\sqrt{3x}$$

Radice di radice

La radice di una radice è uguale a una radice che ha per indice il prodotto degli indici e per radicando lo stesso radicando.

$$\sqrt[3]{\sqrt{x}}=\sqrt[6]{x}$$

Se la radice interna ha un suo coefficiente prima di eseguire l'operazione bisogna portare dentro la radice tale coefficiente.

$$\sqrt[5]{x\sqrt{x}}=\sqrt[5]{\sqrt{x^2\cdot x}}=\sqrt[10]{x^3}$$

Razionalizzazione del denominatore di una frazione

Non è possibile rendere razionale un numero che è irrazionale, tuttalpiù si può razionalizzare il denominatore di una frazione per rendere più semplici eventuali calcoli successivi. I metodi di razionalizzazione dipendono dai termini contenuti nel denominatore stesso.

a) Un termine: $\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$

b) Due termini: $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{5-2}=\frac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{3}=\sqrt{5}+\sqrt{2}$

Radicali doppi

Un radicale doppio è un radicale nella forma $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$. Esso si risolve riducendolo alla forma di due radicali semplici; ciò è possibile, se $a^2 - b$ è un quadrato perfetto, usando la formula:

$$\boxed{\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}}$$

<u>ESEMPIO</u>: $\sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{9-5}}{2}} - \sqrt{\frac{3-\sqrt{9-5}}{2}} = \sqrt{\frac{3+2}{2}} - \sqrt{\frac{3-2}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}$

Potenze con esponente razionale

Un numero reale positivo elevato ad esponente frazionario è uguale a un radicale che ha per indice della radice il denominatore dell'esponente frazionario e per esponente del radicando il numeratore della stessa frazione: $\boxed{a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}}$.

<u>ESEMPI</u>: $2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3}$; $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

Con procedimento inverso un radicale assoluto può essere scritto come potenza con esponente frazionario.

Gli esercizi che tratteremo contengono solo radicali quadratici $\left(\sqrt{\ }\right)$ con radicandi numerici.

<u>ESERCIZI</u>

1) $2\sqrt{3}+5\sqrt{2}-7\sqrt{3}-\sqrt{3}+3\sqrt{2} =$ $\left[8\sqrt{2}-6\sqrt{3}\right]$

2) $\sqrt{18}-3\sqrt{8}-5\sqrt{12}+2\sqrt{48}+\sqrt{50} =$ $\left[2\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right]$

3) $2\sqrt{3}\left(+5\sqrt{2}\right)-7\sqrt{3}\left(-3\sqrt{2}\right)=$ $\left[31\sqrt{6}\right]$

4) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{12}\cdot\sqrt{18} =$ $[36]$

5) $\sqrt{\frac{3}{2}}\left(-\sqrt{\frac{10}{9}}\right)\left(+\sqrt{\frac{3}{5}}\right) =$ $[1]$

6) $\sqrt{72} : \sqrt{6} : \sqrt{2} =$ $\left[\sqrt{6}\right]$

7) $\sqrt{\frac{5}{2}} : \sqrt{\frac{10}{27}} : \sqrt{\frac{3}{8}} =$ $\left[3\sqrt{2}\right]$

8) $\left(3\sqrt{2}+1\right)\left(2\sqrt{2}-4\right)-\left(1+\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)+\left(3\sqrt{2}\right)^2 =$ $\left[22-13\sqrt{2}\right]$

9) $\frac{6}{\sqrt{3}}+\frac{5}{\sqrt{5}} =$ $\left[2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right]$