Breve ripasso di geometria analitica

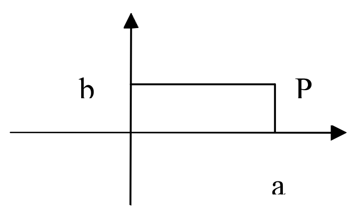
Definito l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, istituiamo una corrispondenza biunivoca fra $\mathbb{R}$ e una retta, con le seguenti convenzioni:

1. scegliamo un punto della retta, da mettere in corrispondenza con il numero reale 0, che chiameremo **origine**
2. fissiamo sulla retta il **verso di percorrenza**; normalmente si sceglie quello verso destra, come indicato dalla freccia. Questo significa che se fra due numeri x,y vale la relazione x<y, i punti della retta che ad essi corrispondono saranno ordinati da sinistra verso destra, cioè al più piccolo corrisponderà il punto più a sinistra.
3. scegliamo **un'unità di misura** u
4. riportiamo sulla retta i multipli razionali ed irrazionali dell'unità di misura e li identifichiamo con i fattori di proporzionalità utilizzati. Se, ad esempio, riportiamo sulla retta, a sinistra dello 0, un segmento di ampiezza pari a tre volte l'unità di misura, l'estremo sinistro del segmento corrisponderà al numero reale -3. Se costruiamo sul segmento di lunghezza pari all'unità di misura il cui estremo sinistro coincide con l'origine un quadrato e poi trasportiamo sulla retta la misura della diagonale del quadrato, al punto individuato con questa costruzione corrisponderà il numero reale $\sqrt{2}$ …..

Osserviamo che si possono istituire infinite corrispondenze biunivoche fra $\mathbb{R}$ e una retta orientata verso destra, ma che, fissata l'origine e scelta l'unità di misura, ad ogni punto della retta corrisponderà uno ed un solo numero reale e, viceversa, ad ogni numero reale corrisponde uno ed un solo punto della retta. Da qui in avanti i nomi "numero reale" e "punto della retta" identificheranno oggetti che penseremo coincidenti.

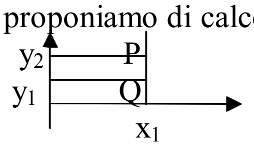
Per costruire il **piano cartesiano** occorrono due rette perpendicolari (assi cartesiani)
(che saranno disposte una orizzontale ed una verticale), ognuna posta in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}$ secondo le seguenti convenzioni:
1. L'origine viene fissata (per entrambe le rette) nel punto di intersezione delle due rette
2. il verso di percorrenza della retta orizzontale è verso destra e quello della retta verticale è verso l'alto
3. su ogni retta si può fissare un'unità di misura sua propria. Normalmente si sceglie la stessa unità di misura sui due assi affinché le figure della geometria elementare risultino riconoscibili (in caso contrario, un quadrato apparirebbe come un rettangolo, un cerchio come un'ellisse,…).

La descrizione di un punto del piano cartesiano può essere fatta in modo chiaro ed univoco attraverso una coppia ordinata di numeri reali P=(a,b).

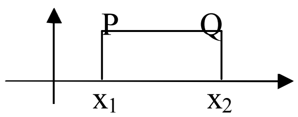


Per descrivere il punto P lo abbiamo proiettato sull'asse orizzontale, detto **asse delle ascisse (o delle x)** e abbiamo individuato il numero reale a che corrisponde al piede della proiezione; poi abbiamo proiettato P sull'asse verticale, detto **asse delle ordinate (o delle y)**, e abbiamo individuato il numero reale b che corrisponde al piede della proiezione. Poiché da un punto si può condurre una ed una sola perpendicolare ad una retta, la costruzione sopra descritta individua una ed una sola coppia di numeri reali, che scriveremo sempre riportando per primo il numero reale a corrispondente alla proiezione sull'asse delle ascisse). Viceversa, data una coppia ordinata (a,b) di numeri reali, essa corrisponde ad uno ed un solo punto del piano cartesiano, punto di intersezione di una retta verticale passante per il punto a e di una retta orizzontale passante per il punto b.
La costruzione descritta permette quindi di istituire una corrispondenza biunivoca fra un piano cartesiano (con origine, versi di percorrenza e unità di misura) e l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali. Come già fatto in precedenza per numeri reali e punti di una retta, questo ci permette di identificare punti del piano cartesiano e coppie ordinate di numeri reali e quindi parleremo indifferentemente di punto P di coordinate (a,b), o di punto (a,b) o di punto P che ha ascissa a ed ordinata b

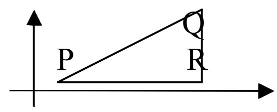
Distanza fra due punti
Siano $P=(x_1,y_1)$ e $Q=(x_2,y_2)$ due punti del piano cartesiano. Ci proponiamo di calcolarne la distanza.
Le situazioni che ci possono interessare sono le seguenti:
1. i due punti hanno la stessa ascissa ,
ossia le loro coordinate sono $P=(x_1,y_1)$ e $Q=(x_1,y_2)$.



In questo caso la distanza dei due punti è la differenza delle ordinate di P e Q, pari a $d=|y_2-y_1|$
2. I due punti hanno la stessa ordinata,
ossia le loro coordinate sono $P=(x_1,y_1)$ e $Q=(x_2,y_1)$.



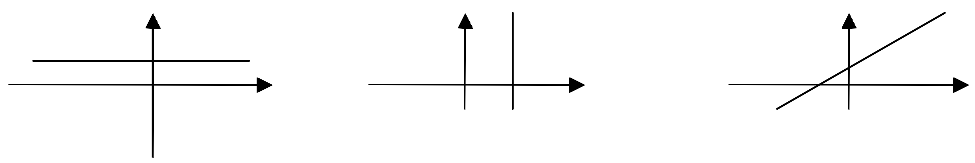
In questo caso la distanza dei due punti è la differenza fra le ascisse di P e Q, pari a $d=|x_2-x_1|$.
3. i punti hanno diverse sia le ascisse che le ordinate



In questo caso, dopo aver calcolato le distanze PR ($d=|x_2-x_1|$) e QR ($d=|y_2-y_1|$), applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo PQR e otteniamo $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

Scopo della geometria analitica è individuare relazioni descrittive di luoghi geometrici di punti del piano o di figure della geometria elementare.

Equazione della retta
La figura più semplice è **la retta**. La sua descrizione in un piano cartesiano dipende dalla posizione che la retta occupa rispetto agli assi cartesiani

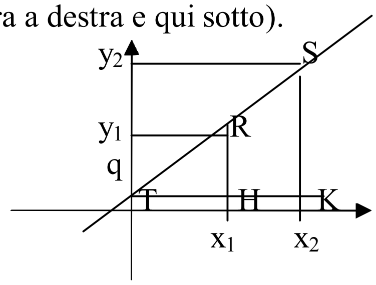


La prima posizione possibile è quella orizzontale (figura a sinistra): la retta è parallela all'asse delle ascisse; essa può quindi essere descritta come il luogo dei punti del piano che ha dall'asse delle ascisse distanza costante e si trova al di sopra dell'asse.. Detta k la distanza rispetto all'unità di misura prescelta, la proiezione sull'asse delle ordinate di qualunque punto della retta ha ordinata k, mentre l'ascissa dei punti della retta è libera di variare in tutto $\mathbb{R}$. La caratteristica comune a tutti i punti della retta riguarda quindi l'ordinata y, che per tutti è k
Equazione della **retta orizzontale**: y=k

La seconda posizione possibile è quella verticale (figura centrale): la retta è parallela all'asse delle ordinate e può essere descritta come il luogo dei punti del piano che ha dall'asse delle ordinate distanza costante e si trova sulla destra di tale asse. Detta c la distanza rispetto all'unità di misura prescelta, la proiezione sull'asse delle x di tutti i punti della retta ha ascissa c, mentre l'ordinata è libera di variare in tutto $\mathbb{R}$. La caratteristica comune a tutti i punti della retta riguarda quindi l'ascissa x, che per tutti è c

Equazione della **retta verticale**: $x=c$.

La terza posizione possibile è quella obliqua, ossia tale da intersecare entrambi gli assi cartesiani (figura a destra e qui sotto).



Sia q il punto in cui la retta interseca l'asse y. La lunghezza del segmento RH è y_1-q, quella del segmento SK è y_2-q. Le ascisse x_1 e x_2 sono le lunghezze dei segmenti TH e TK, rispettivamente. I triangoli rettangoli RHT e SKT sono simili perché hanno un angolo acuto in comune. Si avrà allora:

$$RH : TH = SK : TK, \quad \text{ossia: } \frac{y_1 - q}{x_1} = \frac{y_2 - q}{x_2}$$

e quanto detto per i due punti R ed S vale per tutti i punti della retta. Detto dunque m tale rapporto costante, si avrà:

$$\frac{y-q}{x} = m \text{ ossia } y = mx + q$$

Equazione della **retta obliqua**: $y=mx+q$.

E' possibile scrivere le tre equazioni raggruppandole in una sola, del tipo: $ax+by+c=0$.
Se poniamo $a=0$, con $b\neq0$, otteniamo $by+c=0$, $by= -c$, $y=-c/b$ (orizzontale). Se poniamo $b=0$, con $a\neq0$, otteniamo $ax+c=0$, ossia $x=-c/a$ (verticale). Se si ha $a,b\neq0$, otteniamo $by= -ax-c$, ossia $y= -ax/b-c/b$ (obliqua).

Equazione della circonferenza (e del cerchio)

Un'altra interessante figura è la **circonferenza**. Essa è definita come il luogo geometrico dei punti che hanno da un punto assegnato detto **centro** una distanza costante detta **raggio.**
Sia $C=(\alpha,\beta)$ il centro della circonferenza e sia $P=(x,y)$ il generico punto della circonferenza. Per appartenere ad essa, P deve avere distanza dal centro C pari al raggio r:

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = r$$

Si noti che la radice al primo membro è sempre definita, perché il radicando è sempre non negativo. Si noti infine che, come ovvio aspettarsi, trattandosi di una distanza, il raggio è un numero reale positivo. Elevando al quadrato i due membri si ottiene allora:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + y^2 - 2\beta y + \beta^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$$

Attenzione! Mentre la prima delle tre equazioni sopra scritta descrive sempre una circonferenza di centro $C=(\alpha,\beta)$ e raggio r; l'ultima delle tre, in cui x^2 ed y^2 hanno lo stesso coefficiente e manca il termine in xy può non rappresentare alcuna circonferenza.

Lo mostriamo partendo dall'equazione

$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$

che ha le caratteristiche sopra elencate e cercando di trovarne centro e raggio.

La riscriviamo nella forma

$x^2 + 2ax + y^2 + 2by + c = 0$

e notiamo che si possono individuare due sviluppi parziali di seconde potenze. Si ha infatti:

$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$, ossia $x^2 + 2ax = (x+a)^2 - a^2$;

$(y+b)^2 = y^2 + 2by + b^2$, ossia $y^2 + 2by = (y+b)^2 - b^2$.

Sostituendo nell'equazione, otteniamo

$(x+a)^2 - a^2 + (y+b)^2 - b^2 + c = 0$, da cui

$(x+a)^2 + (y+b)^2 = a^2 + b^2 - c$,

nella quale il secondo membro dovrebbe rappresentare il quadrato del raggio. Perché questo sia possibile, occorre che il secondo membro sia non negativo. In tal caso avremo scritto l'equazione di una circonferenza di centro C=(-a,-b) e raggio $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

Se invece il secondo membro è negativo, l'uguaglianza scritta è priva di senso e quindi non può descrivere alcuna figura geometrica.

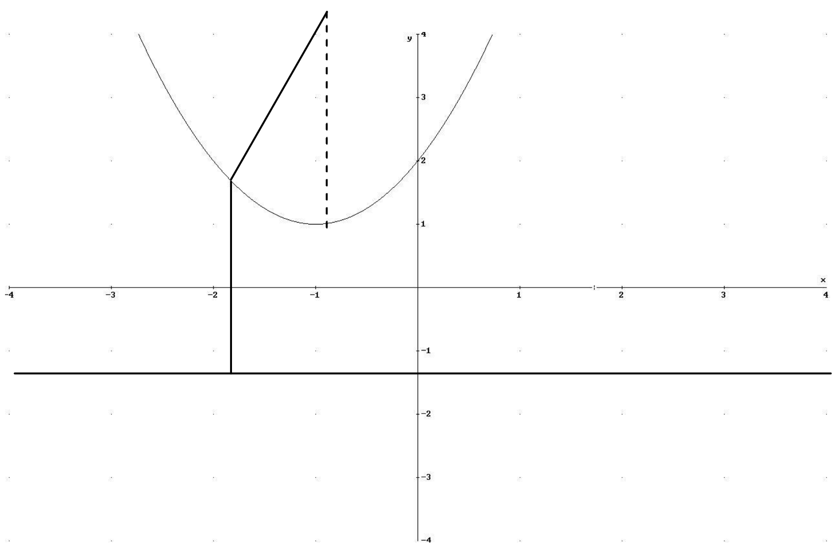
Nel caso particolare che il raggio sia nullo, la circonferenza si riduce al solo centro, le cui coordinate (-a,-b) verificano l'equazione $(x+a)^2 + (y+b)^2 = 0$.

Se volessimo descrivere il **cerchio**, dovremmo considerare i punti che hanno dal centro distanza non superiore al raggio, ossia un'equazione del tipo $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 \leq r^2$.

Equazione della parabola

Si definisce **parabola** il luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto fissato detto **fuoco** e da una retta fissata detta **direttrice**. La posizione della direttrice rispetto agli assi cartesiani può essere quella di qualunque retta (orizzontale, verticale, obliqua).

Qui esaminiamo solo il semplice caso in cui la direttrice sia una retta orizzontale.



Detti F=(α,β) il fuoco, y=d l'equazione della direttrice e P=(x,y) il generico punto appartenente alla parabola, la relazione che P dovrà verificare sarà l'equidistanza dalla direttrice e dal fuoco, ossia

$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = |y-d|$.

Trattandosi dell'uguaglianza fra due quantità positive, possiamo elevare i due membri al quadrato, ottenendo:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(y-d)^2$$

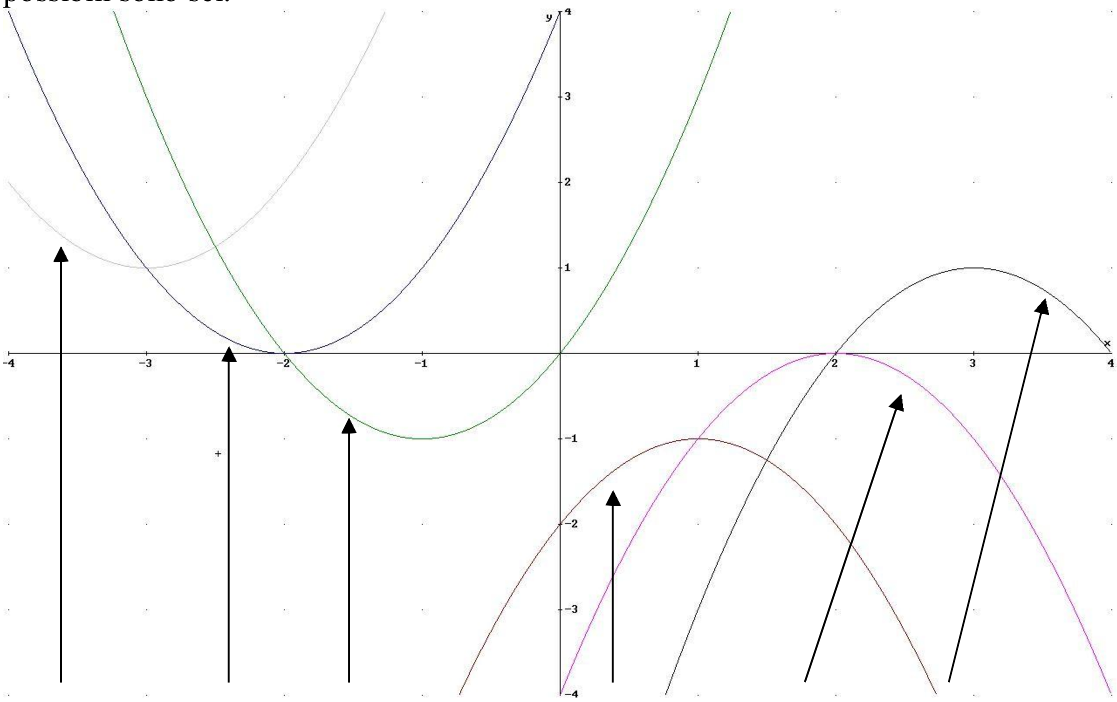
$$x^2-2\alpha x+\alpha^2+y^2-2\beta y+\beta^2=y^2-2dy+d^2$$

$$2(d-\beta)y=-x^2+2\alpha x-\alpha^2-\beta^2+d^2$$

$$y=\frac{1}{2(\beta-d)}x^2+\frac{\alpha}{d-\beta}x+\frac{d^2-\alpha^2-\beta^2}{2(d-\beta)}$$

Notiamo che il coefficiente di x^2 è positivo o negativo a seconda che β sia maggiore o minore di d, ossia a seconda che il fuoco si trovi al di sopra o al di sotto della direttrice, ossia che la concavità della parabola sia rivolta verso l'alto o verso il basso.

Data un'equazione della forma $y=ax^2+bx+c$ proviamo a tracciarne il diagramma. I casi possibili sono sei:



1 2 3 4 5 6

Essi si differenziano per il verso della concavità (le prime tre sono concave verso l'alto, le altre tre lo sono verso il basso) e per la posizione rispetto all'asse delle ascisse, che possono non intersecare, oppure intersecare in due punti, coincidenti o distinti.

Come già osservato, il verso della concavità dipende dal segno del coefficiente a di x^2.

La posizione rispetto all'asse delle x, invece, può essere determinata individuando gli eventuali punti che appartengono sia alla parabola che all'asse delle x. Essendo questa una retta orizzontale, la sua equazione sarà del tipo y=k. Il passaggio per l'origine degli assi cartesiani impone che sia k=0. L'equazione dell'asse delle ascisse è quindi y=0. Un punto che si trovi all'intersezione di due linee deve verificare le equazioni di entrambe le linee, ossia deve verificare il sistema costituito dalle equazioni delle due linee. Nel caso in esame, il sistema da considerare è

$$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y=0 \end{cases}, \quad \text{da cui} \quad ax^2+bx+c=0.$$

Abbiamo ottenuto un'equazione di secondo grado, che può avere nessuna radice, due radici coincidenti o due radici distinte a seconda che il suo discriminante sia negativo, nullo o positivo.

Le parabola 1 e 4 della figura sopra non intersecano l'asse delle ascisse, quindi l'equazione di secondo grado non ammette soluzioni reali. Siamo nel caso di $\Delta<0$. Si noti che l'ordinata dei punti di queste parabole è di segno costante, per la precisione è sempre positiva per la parabola 1 (che ha coefficiente $a>0$) e sempre negativa per la parabola 4 (che ha coefficiente $a<0$).
Le parabole 2 e 5 sono tangenti all'asse delle ascisse. Quindi l'equazione di secondo grado ha due soluzioni coincidenti e questo succede nel caso $\Delta=0$. Anche in questo caso l'ordinata delle due parabole è di segno costante, ma esiste un punto di annullamento.
Le parabole 3 e 6 intersecano l'asse delle ascisse in due punti distinti, quindi l'equazione di secondo grado ha due soluzioni reali e distinte ($\Delta>0$) e l'ordinata dei punti della parabola non è più di segno costante.
Alla luce di quanto detto, compiamo una breve digressione sullo

Studio del segno di un trinomio

Si consideri il trinomio $y = T(x) = ax^2 + bx + c$ e consideriamo le tre situazioni possibili nella ricerca delle sue radici.

1. $\Delta>0$. In questo caso il trinomio ha due radici distinte α,β (supponiamo ad esempio che sia $\alpha<\beta$) e può essere scomposto come segue:

$$T(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta\right) = a\left(x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha\beta\right) =$$

$$= a\left[x(x-\alpha) - \beta(x-\alpha)\right] = a(x-\alpha)(x-\beta)$$

Abbiamo individuato tre fattori; esaminiamo per primi quelli dipendenti da x.
$x-\alpha>0$ per $x>\alpha$; $x-\beta>0$ per $x>\beta$. Il prodotto $(x-\alpha)(x-\beta)$ è positivo quando i due fattori sono entrambi positivi, cioè per $x>\beta$ o entrambi negativi, cioè per $x<\alpha$. In totale, per valori esterni all'intervallo delle radici, ossia per $x<\alpha$ e per $x>\beta$, il trinomio avrà il segno del coefficiente a.
Questa situazione è illustrata dalle parabole 3 e 6 della figura della pagina precedente.

2. $\Delta=0$. In questo caso il trinomio ha due radici coincidenti, che chiamiamo α. La scomposizione fatta sopra può essere ripetuta, pur di sostituire β con α. Il trinomio può essere scritto come $T(x) = a(x-\alpha)^2$. Il fattore $(x-\alpha)^2$ non è mai negativo e quindi il trinomio ha sempre il segno del coefficiente a, tranne che nel punto α, dove si annulla. Questa situazione è illustrata dalle parabole 2 e 5 nella figura della pagina precedente.

3. $\Delta<0$. In questo caso il trinomio non ha radici reali e non può essere scomposto. Possiamo però riscriverlo come segue:

$$T(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

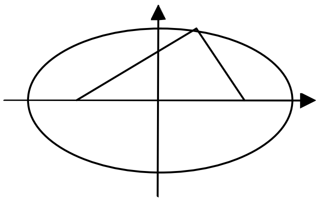
$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right]$$

Nell'ultima parentesi quadrata abbiamo la somma di due quantità mai negative, la prima perché è un quadrato, la seconda perché è il rapporto fra $-\Delta$, che è positivo in quanto $\Delta<0$, ed un quadrato.
Il segno del trinomio è quindi ovunque quello del coefficiente a. Questa situazione è illustrata dalle parabole 1 e 4 nella figura della pagina precedente.

Equazione dell'ellisse

L'ellisse è il luogo geometrico dei punti del piano per i quali la **somma delle distanze** da due punti fissi detti **fuochi** è costante.

I fuochi possono trovarsi nel piano cartesiano in qualunque posizione. Studiamo qui il caso più semplice, nel quale i fuochi si trovano sull'asse delle ascisse, in posizione simmetrica rispetto all'origine.



Indichiamo con (-c,0) e (c,0) le coordinate dei fuochi (c>0) e con *2a* la somma costante delle distanze dei punti dell'ellisse dai fuochi. Osserviamo che la quantità *2a* rappresenta la somma di due lati di un triangolo e quindi deve essere maggiore del terzo lato (la distanza tra i fuochi), che misura *2c*. Si dovrà quindi avere a>c.
Indichiamo con P=(x,y) il generico punto dell'ellisse. La distanza di P dal fuoco F_1=(-c,0) è $\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$; la distanza di P dal fuoco F_2=(c,0) è $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$; la legge che il punto P deve verificare è quindi:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

Cerchiamo di esplicitarla.

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Poniamo (poi si discuterà questa condizione) $2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2} \geq 0$. Trattandosi di due quantità positive, possiamo elevare i due membri al quadrato:

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2$$

$$x^2+2cx+c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2 - 4cx$$

Poniamo (poi si discuterà questa condizione) $4a^2-4cx\geq 0$. Trattandosi di due quantità positive, possiamo elevare i due membri al quadrato:

$$a^2\left[(x-c)^2+y^2\right] = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$x^2(a^2-c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

Ricordando che a>c, la quantità a^2-c^2 è positiva. Per semplicità di scrittura la indichiamo con b^2, ottenendo $x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, dalla quale, dividendo i due membri per a^2b^2, otteniamo

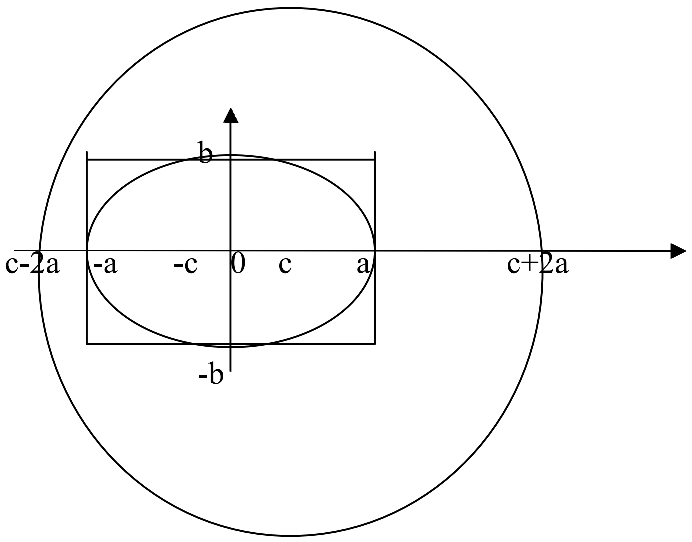
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Questa è l'equazione dell'ellisse.

Osserviamo che l'ellisse presenta varie **simmetrie**. Infatti se ad x sostituiamo -x, in virtù dell'elevamento al quadrato, l'equazione rimane inalterata. Quindi se il punto P=(x,y) appartiene all'ellisse, anche il punto Q=(-x,y) le appartiene (simmetria rispetto all'asse y). Analogamente, se ad y sostituiamo -y, l'equazione rimane invariata. Quindi, se il punto P=(x,y) appartiene all'ellisse, anche il punto R=(x,-y) le appartiene (simmetria rispetto all'asse x). Infine, se ad entrambe le coordinate cambiamo il segno, l'equazione rimane inalterata. Se il punto P=(x,y) appartiene all'ellisse, anche il punto S=(-x,-y) le appartiene (simmetria rispetto all'origine).

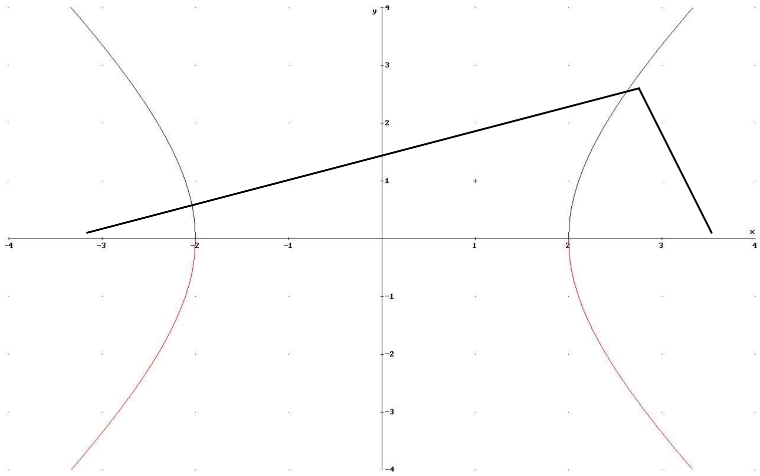
Osserviamo poi che se si pone y=0 (equazione dell'asse x) si ottiene $\frac{x^2}{a^2}=1; \quad x=\pm a$ e se si pone x=0 si ottiene $\frac{y^2}{b^2}=1; \quad y=\pm b$. L'ellisse è quindi contenuta nel rettangolo i cui lati orizzontali hanno ordinate b e $-b$ e i cui lati verticali hanno ascisse a e $-a$.

Esaminiamo ora le condizioni poste per ottenere l'equazione dell'ellisse:
$2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\geq 0$ può essere riscritta come $2a\geq\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ ossia $(x-c)^2+y^2\leq 4a^2$, che è l'equazione di un cerchio di centro (c,0) e raggio 2a. Essa è verificata dai punti dell'ellisse se l'ellisse è contenuta nel cerchio. Questo è vero, come si può osservare nella seguente figura, in particolare perché la circonferenza che delimita il cerchio interseca l'asse x nei punti di ascissa c+2a e c-2a<-a



Per quanto riguarda la condizione $4a^2-4cx\geq 0$, essa significa che per i punti dell'ellisse deve essere $x\leq\frac{a^2}{c}$. Anche questa condizione è verificata da tutti i punti dell'ellisse perché la frazione $\frac{a^2}{c}$ è >a, in quanto si è dovuto porre, per le proprietà dei triangoli, a>c.
Tutte le condizioni poste per poter eseguire i calcoli sono dunque verificate e l'equazione ottenuta descrive tutti i punti dell'ellisse.

Equazione dell'iperbole
Si definisce iperbole il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante la **differenza delle distanze** da due punti fissi detti **fuochi**.
Osserviamo che la definizione dell'ellisse ci porta ad una curva chiusa, che può essere tracciata, per esempio, fissando due pioli (i fuochi) ed utilizzando un filo di lunghezza superiore alla distanza focale per guidare la matita.
Invece la definizione dell'iperbole, per la quale la quantità costante è la differenza delle distanze dai fuochi, non pone limitazioni di sorta alle distanze dai fuochi, che possono essere anche molto grandi.



Anche in questo caso i fuochi possono occupare nel piano cartesiano qualunque posizione. Consideriamo qui il caso in cui essi siano posti sull'asse delle x, simmetrici rispetto all'origine.
Indichiamo con (-c,0) e (c,0) le coordinate dei fuochi (c>0) e con *2a* la somma costante delle distanze dei punti dell'ellisse dai fuochi. Osserviamo che la quantità *2a* rappresenta la differenza di due lati di un triangolo e quindi deve essere minore del terzo lato (la distanza tra i fuochi), che misura *2c*. Si dovrà quindi avere a<c.
Indichiamo con P=(x,y) il generico punto dell'ellisse. La distanza di P dal fuoco F_1=(-c,0) è $\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$; la distanza di P dal fuoco F_2=(c,0) è $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$.
Pensiamo inizialmente che la distanza dal fuoco F_1 sia maggiore di quella dal fuoco F_2. Ci occupiamo perciò del ramo di destra dell'iperbole; allora la legge che il punto P deve verificare è:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

Cerchiamo di esplicitarla.

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Trattandosi di due quantità positive, possiamo elevare i due membri al quadrato:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$x^2+2cx+c^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2$$

$$4cx-4a^2=4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$cx-a^2=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Poniamo (poi si discuterà questa condizione) $cx\text{-}a^2\geq 0$. Trattandosi di due quantità positive, possiamo elevare i due membri al quadrato:

$$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2\left[(x-c)^2+y^2\right]=$$

$$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$

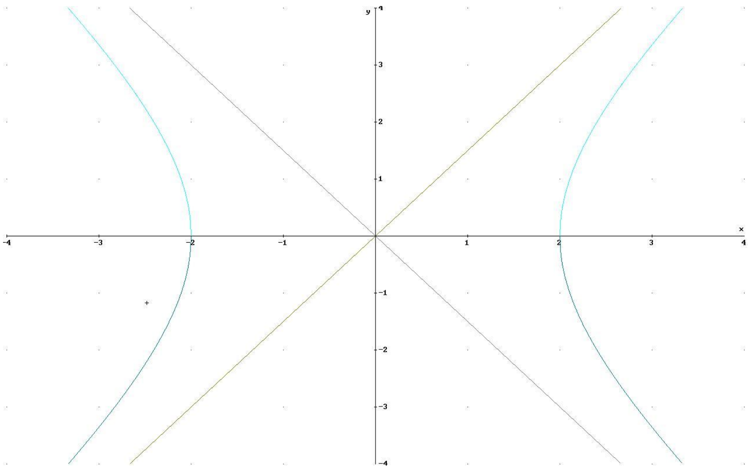
$$x^2(c^2-a^2)-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

Ricordando che a<c, la quantità c^2- a^2 è positiva. Per semplicità di scrittura la indichiamo con b^2, ottenendo $x^2b^2-a^2y^2=a^2b^2$, dalla quale, dividendo i due membri per a^2b^2, otteniamo

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Questa è l'equazione dell'iperbole.

Osserviamo che l'iperbole presenta varie **simmetrie**. Infatti se ad x sostituiamo -x, in virtù dell'elevamento al quadrato, l'equazione rimane inalterata. Quindi se il punto P=(x,y) appartiene



all'iperbole, anche il punto Q=(-x,y) le appartiene (simmetria rispetto all'asse y). Analogamente, se ad y sostituiamo -y, l'equazione rimane invariata. Quindi, se il punto P=(x,y) appartiene all'iperbole, anche il punto R=(x,-y) le appartiene (simmetria rispetto all'asse x). Infine, se ad entrambe le coordinate cambiamo il segno, l'equazione rimane inalterata. Se il punto P=(x,y) appartiene all'iperbole, anche il punto S=(-x,-y) le appartiene (simmetria rispetto all'origine).

Osserviamo poi che se si pone y=0 (equazione dell'asse x) si ottiene $\frac{x^2}{a^2}=1; \quad x=\pm a$ e se si pone x=0 si ottiene $-\frac{y^2}{b^2}=1$, equazione che non è verificata da alcun valore di y, cioè l'iperbole non interseca l'asse y.

Esaminiamo ora la condizione $cx\text{-}a^2 \geq 0$. Essa significa $x \geq \frac{a^2}{c}$. Ricordando che a<c, si ha $\frac{a^2}{c}<a$ e quindi questa condizione è verificata da tutti i punti del ramo di destra dell'iperbole, che sta tutto alla destra del punto di intersezione con l'asse x (x=a).

Teoricamente dovremmo ripetere i calcoli anche nella situazione in cui la distanza dal fuoco F_1 sia minore di quella dal fuoco F_2 (ramo di sinistra dell'iperbole). Il risultato che si ottiene è assolutamente identico e i calcoli sono così simili a quelli già fatti che non vengono qui riportati.

Se proviamo ad esplicitare l'equazione dell'iperbole rispetto alla variabile y otteniamo:

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1; \quad y^2=b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)=\frac{b^2}{a^2}\left(x^2-a^2\right)$$

Abbiamo già osservato che la definizione dell'iperbole permette di pensare a punti anche molto lontani dall'origine, ossia permette che il valore di x possa crescere senza limitazioni.

Se osserviamo che invece che il termine a^2 in parentesi rimane costante, ci rendiamo conto che, al crescere di x in valore assoluto l'influenza di questo termine sul valore di y^2 è sempre meno rilevante.

Questo ci dice che al crescere del valore assoluto di x il comportamento della curva non sarà molto lontano da quello di due rette. Si ha infatti:

$$y=\pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}\left(x^2-a^2\right)}=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

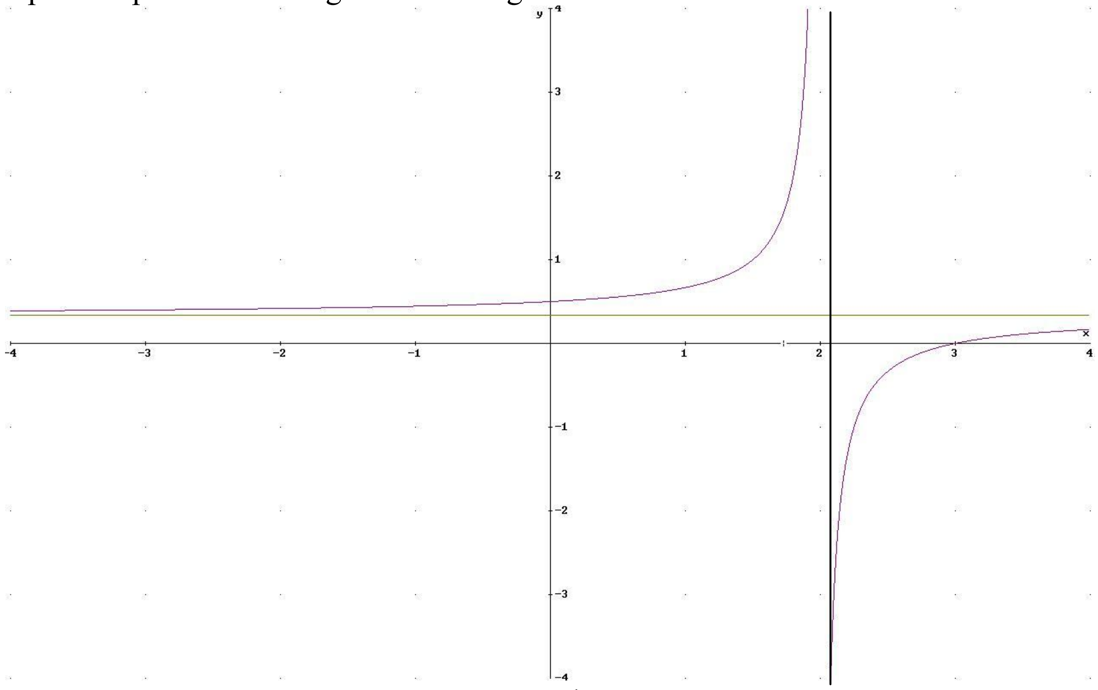
dalla quale, trascurando il termine a^2 si ottiene l'equazione delle rette

$$y=\pm\frac{b}{a}x,$$

che vengono chiamate asintoti dell'iperbole.

Una corretta definizione di asintoto richiede l'utilizzo dell'operazione di limite, che qui non supponiamo disponibile. Visualizziamo la posizione degli asintoti rispetto all'iperbole.

Con una rototraslazione, nel caso particolare in cui i due asintoti siano fra loro perpendicolari. l'iperbole può essere disegnata come segue:



L'equazione della curva è del tipo $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ e i suoi asintoti hanno equazione y=a/c e x=-d/c.