Equazioni di 2° grado

Tipi di equazioni:

Un'equazione (ad una incognita) è di 2° grado se può essere scritta nella forma generale (o *forma tipica* o ancora *forma* canonica):

$$ax^2 + bx + c = 0$$

con a, b e c numeri reali (però a≠0) oppure espressioni letterali che rappresentano numeri noti (in tal caso l'equazione è detta letterale o parametrica). Un'equazione di 2° grado ridotta alla forma canonica si dice:

1) **completa** quando i tre coefficienti a, b, e c sono tutti diversi da zero ($ax^2 + bx + c = 0$);
2) **pura** quando b vale zero ($ax^2 + c = 0$);
3) **spuria** quando c vale zero ($ax^2 + bx = 0$).

1) Completa:

Si risolve adoperando la seguente formula risolutiva:

$$\mathbf{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$ (formula normale)

Se la *b* è pari si può usare la seguente formula risolutiva:

$$\mathbf{x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}}$$ (formula ridotta)

Esempio 1:

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = \frac{-2 - 4}{2} = -3$$

$$x_2 = \frac{-2 + 4}{2} = 1$$

Esempio 2:

$$16x^2 - 24x + 9 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{24 \pm \sqrt{(-24)^2 - 4(16)(9)}}{2(16)}$$

$$x_{1,2} = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 576}}{32}$$

$$x_{1,2} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$$

2) Pura:

Si risolve portando al primo membro il termine con la x e al secondo il termine noto. Dopo si trova la radice quadrata del termine noto.

Esempio 1:

$3x^2 - 12 = 0$

$3x^2 = 12$

$\frac{3x^2}{3} = \frac{12}{3}$

$x^2 = 4$

$x = \sqrt{4}$

$x = \pm 2$

Esempio 2:

$5x^2 + 25 = 0$

$5x^2 = -25$

$\frac{5x^2}{5} = \frac{-25}{5}$

$x^2 = -25$

$x = \sqrt{-25}$

Se si ottiene la radice di un numero negativo, che risulterà essere un numero immaginario:

$x = \sqrt{25 \cdot (-1)}$

$x = \sqrt{25} \cdot \sqrt{-1}$

$x = \pm 5i$

essendo i l'unità immaginaria, ovvero la radice quadrata di -1

3) Spuria:

Si risolve raccogliendo tutta l'equazione e poi procedendo secondo la legge di annullamento del prodotto, per la quale un prodotto è uguale a zero se almeno un fattore è zero. Quindi una soluzione sarà sempre zero.

Esempio 1:

$7x^2 - 14x = 0$

$7x(x-2) = 0$

$7x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Esempio 2:

$x^2 - 3x = 0$

$x(x-3) = 0$

$x = 0$

$x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

Le soluzioni di un'equazione di 2° grado:

La formula risolutiva di un'equazione di secondo grado si può anche scrivere: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, dove $\Delta = b^2 - 4ac$.

Il Δ (discriminante) serve a stabilire il tipo di soluzioni dell'equazione:

Se $\Delta > 0$ allora le soluzioni sono reali e distinte;

Se $\Delta = 0$ allora le soluzioni sono reali e coincidenti ($x_z = x_2$);

Se $\Delta < 0$ allora le soluzioni sono complesse coniugate ($x_{1,2} = a \pm ib$).

Esempio 1:

$x^2 - 6x + 5 = 0$

$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(5)$

$\Delta = 36 - 20$

$\Delta = 16$

Quindi le soluzioni sono reali e distinte

Esempio 2:

$x^2 - 3x + 4 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4(1)(4)$

$\Delta = 9 - 16$

$\Delta = -7$

Quindi le soluzioni sono complesse coniugate.

Somma e prodotto delle soluzioni

$s = x_1 + x_2$ e

$p = x_1 \cdot x_2$

La somma e il prodotto delle soluzioni si possono trovare anche con le seguenti formule:

$$\mathbf{s = -\frac{b}{a}}$$

$$\mathbf{p = \frac{c}{a}}$$

Inoltre sapendo la somma e il prodotto delle soluzioni si può ricavare l'equazione da cui derivano con la seguente formula:

$$\mathbf{x^2 - sx + p = 0}$$

Da tutto ciò si può dedurre che:
-si può calcolare il valore di due numeri, nota la loro somma e il loro prodotto

Esempio:
Dato:

$s = 5$

$p = 4$

si ottiene:

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = \frac{5-3}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{5+3}{2} = 4$$

-sapendo le soluzioni di un'equazione si può ricavare l'equazione da cui derivano:

Esempio:
Dato:
$x_1 = -3$
$x_2 = 5$

Si ottiene:
$s = 2$
$p = -15$
$x^2 - 2x - 15 = 0$

Scomposizione di un trinomi di secondo grado (forma canonica dell'equazione di 2° grado)

Un trinomio di secondo grado può essere scomposto con la seguente formula:

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

essendo x_1 e x_2 soluzioni dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$.

Esempio:
Dato il trinomio
$6x^2 - 5x + 1$
Risolvendo l'equazione associata, si ottiene:

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(6)(1)}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = \frac{5 - 1}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{5 + 1}{2} = 3$$

Pertanto:

$$6x^2 - 5x + 1 = 6(x - 2)(x - 3)$$

Regola di Cartesio

La regola di Cartesio serve a determinare i segni delle soluzioni di un'equazione. Si può applicare solo se le soluzioni sono reali, ovvero quando $\mathbf{\Delta \geq 0}$.

Per determinare i segni delle soluzioni si esaminano i segni dei coefficienti dell'equazione (scritta in forma canonica) seguendo il seguente criterio:
Variazione di segno: radice positiva
Permanenza di segno: radice negativa

Esempio 1:

$$3x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$\Delta = (5)^2 - 4(3)(-3)$$

$$\Delta = 25 + 36$$

$$\Delta = 61$$

Si può applicare la Regola di Cartesio.
Esaminiamo i segni:
+ + - ovvero 1 permanenza, 1 variazione
Le soluzioni (o radici) saranno una negativa e una positiva.

Esempio 2:

$$2x - 3x + 5 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4(2)(5)$$

$$\Delta = 9 - 40$$

$$\Delta = -31$$

La regola di Cartesio non può essere applicata.

Le equazioni di secondo grado fratte

Si segue il normale criterio, ricordando però di mettere le condizioni di accettabilità.

Esempio:

$$\frac{x}{x-1} + \frac{x-1}{x-5} = 3 - 5\frac{x-2}{x-1}$$

$$\frac{x}{x-1} + \frac{x-1}{x-5} = 3 - \frac{5x-10}{x-1}$$

$$\frac{x(x-5)+(x-1)(x-1)}{(x-1)(x-5)} = \frac{3(x-1)(x-5)-(5x-10)(x-5)}{(x-1)(x-5)}$$

$C.A.$

$$x \neq 1$$

$$x \neq 5$$

$$2x^2 - 7x + 1 = 3x^2 - 15x - 3x + 15 - 5x^2 + 25x + 10x - 50$$

$$4x^2 - 24x + 36 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-24) \pm \sqrt{(24)^2 - 4(4)(36)}}{2(4)}$$

$$x_{1,2} = \frac{24 \pm \sqrt{576 - 576}}{8}$$

$$x_{1,2} = \frac{24}{8} = 3$$