

Disequazioni

Una disequazione è una disuguaglianza tra due espressioni algebriche che è soddisfatta da un insieme di valori reali (intervallo composto da infiniti valori) assegnati all'incognita (o alle incognite).

I simboli delle disuguaglianze sono:

$>$ (maggiore); $<$ (minore); \geq (maggiore o uguale); \leq (minore o uguale)

Risolvere una disequazione vuol dire trovare l'intervallo (o gli intervalli) di valori che può assumere l'incognita per verificare la disuguaglianza (in casi particolari una disuguaglianza può essere impossibile, sempre vera o essere verificata da un solo valore dell'incognita).

In generale per le disequazioni valgono i principi di equivalenza validi per le equazioni, ma bisogna aggiungere che:

- 1) quando si cambia segno ad entrambi i membri della disuguaglianza bisogna invertirne il verso (da $>$ a $<$ o viceversa):

$$5 > 2 \Rightarrow -5 < -2$$

- 2) la regola precedente vale anche se si moltiplica, o si divide, la disequazione per un numero negativo:

$$8 > 6 \Rightarrow 8 \cdot (-2) < 6 \cdot (-2) \Rightarrow -16 < -12 \quad \text{ma anche}$$

$$8 < 6 \Rightarrow 8 : (-2) > 6 : (-2) \Rightarrow -4 > -3$$

- 3) nelle disequazioni fratte il denominatore può essere eliminato solo se è sempre positivo (nel caso contrario si seguirà il procedimento relativo alle disequazioni fratte come si vedrà in seguito).

Disequazioni di primo grado

Si risolvono come le equazioni di 1° grado tenendo presenti le regole 1), 2) e 3).

ESEMPIO: $3(x-3) - 2x \geq 5 - 2(2-3x)$

$$3x - 9 - 2x \geq 5 - 4 + 6x$$

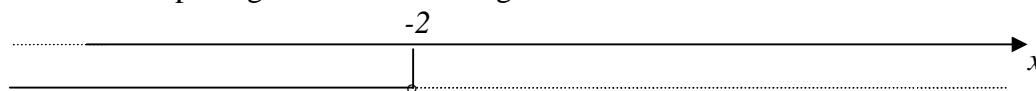
$$3x - 2x - 6x \geq 9 + 5 - 4$$

$$-5x \geq 10$$

$$\frac{-5x}{-5} \leq \frac{10}{-5}$$

$$x \leq -2$$

Tale soluzione si interpreta graficamente nel seguente modo:



con la linea continua si rappresentano i valori che soddisfano la disequazione, il cerchietto indica che anche il valore -2 è accettato.

CASI PARTICOLARI: Se l'incognita si annulla la disuguaglianza sarà:

- a) sempre vera ($\forall x \in R$) quando si avrà $0 >$ di un numero negativo oppure $0 <$ di un numero positivo;

b) sempre falsa (\emptyset insieme vuoto) quando si avrà $0 <$ di un numero negativo oppure $0 >$ di un numero positivo; scriveremo *impossibile*.

ESERCIZI

1) $3(x-1) - 2 < 5x + 1$

2) $9(20 - 5x) + 27 > 8(5x - 6)$

3) $3 - x(x+1) - [x - 2(1 - 3x)] < (3 - x)(3 + x)$

4) $(3x+1)(2x-3) \leq 6x(x-1) - x$

5) $(2x+1)^2 < 6 + (2x-1)^2 - 3(1-2x)$

6) $(3x+1)^2 - 4x(x-2) \leq 5x(x+6) - 16x$

7) $\frac{3x+1}{4} - \frac{x+5}{3} \leq 1 - \frac{x+2}{6}$

8) $\frac{1}{3}x - \frac{x-4}{2} > \frac{5-x}{6} + 1$

9) $\frac{1-x}{4} - \frac{2x-1}{2} \geq \frac{3x-1}{4} - 5\left(x + \frac{1}{3}\right)$

10) $4\left[\frac{x-2}{3} - 2\left(\frac{x-1}{6} - \frac{1-x}{9}\right)\right] < x - 8$

Soluzioni: $[x > -3]$; $[x < 3]$; $\left[x > -\frac{1}{2}\right]$; $[\forall x \in \mathbb{R}]$; $\left[x < \frac{3}{2}\right]$; $[impossibile]$; $\left[x \leq \frac{25}{7}\right]$;
 $[\forall x \in \mathbb{R}]$; $\left[x \geq -\frac{8}{9}\right]$; $[x > 4]$

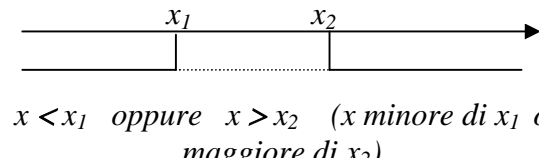
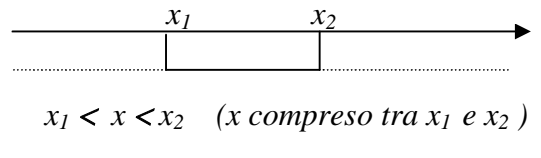
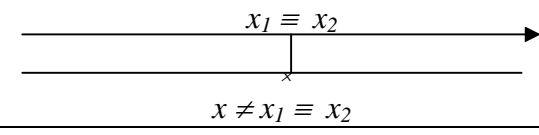
Disequazioni di secondo grado

Per trovare gli intervalli in cui una disequazione di secondo grado è soddisfatta bisogna risolvere l'equazione di 2° grado ad essa associata. Ricordiamo, a tale proposito, che la formula risolutiva è:

$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (tale formula, impropriamente, si può usare anche nelle equazioni incomplete).

Risolvendo tutte le operazioni presenti e portando tutti i termini al primo membro la disequazione si presenterà nella forma $ax^2 + bx + c > 0$ o nella forma $ax^2 + bx + c < 0$.

Per interpretare le soluzioni ottenute dalla risoluzione dell'equazione di 2° grado si segue la seguente tabella:

$\Delta = b^2 - 4ac$	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c < 0$
$\Delta > 0$ 2 soluzioni reali e distinte (diverse)	E' verificata da tutti i valori della x che sono esterni all'intervallo che ha per estremi le radici dell'equazione  $x < x_1$ oppure $x > x_2$ (x minore di x_1 o maggiore di x_2)	E' verificata da tutti i valori della x che sono interni all'intervallo che ha per estremi le radici dell'equazione  $x_1 < x < x_2$ (x compreso tra x_1 e x_2)
$\Delta = 0$ 2 soluzioni reali e coincidenti (uguali)	E' verificata da tutti i valori della x che sono diversi dalle due radici coincidenti  $x \neq x_1 \equiv x_2$	Non ammette soluzioni
$\Delta < 0$ nessuna soluzione	E' soddisfatta da tutti i valori della x	Non ammette soluzioni

Tale tabella è valida con $a > 0$; in caso contrario basta cambiare il segno ai termini della disequazione e invertire il verso della disuguaglianza. Ad esempio la disequazione $-3x^2 + 5x - 2 > 0$ si potrà trasformare nella disequazione $3x^2 - 5x + 2 < 0$.

ATTENZIONE: se la disequazione è \geq e $\Delta = 0$ la soluzione sarà $\forall x \in R$

se la disequazione è \leq e $\Delta = 0$ la soluzione sarà $x = x_{1/2}$ unica soluzione

ESEMPI:

1) $3x^2 + 2x - 1 > 0$ risolviamo l'equazione associata $3x^2 + 2x - 1 = 0$:

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{(+2)^2 - 4 \cdot (+3) \cdot (-1)}}{2 \cdot (+3)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{6} = \frac{-2 \pm 4}{6}$$

$$x_1 = \frac{-2-4}{6} = -\frac{6}{6} = -1 \quad \wedge \quad x_2 = \frac{-2+4}{6} = +\frac{2}{6} = +\frac{1}{3}$$

la disequazione sarà soddisfatta per valori esterni, quindi scriveremo $x < -1 \vee x > +\frac{1}{3}$

2) $x^2 + 6x + 5 < 0$ risolviamo l'equazione associata:

$$x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{-6 \pm 4}{2} \rightarrow x_1 = -\frac{10}{2} = -5 \quad \wedge \quad x_2 = -\frac{2}{2} = -1$$

la disequazione sarà soddisfatta per valori interni, quindi scriveremo $-5 < x < -1$

3) $x^2 - 4x + 4 > 0$ risolviamo l'equazione associata:

$$x_{1/2} = \frac{+4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \frac{+4 \pm 0}{2} \rightarrow x_1 = +\frac{4}{2} = 2 \quad \wedge \quad x_2 = +\frac{4}{2} = 2 \text{ (soluzioni coincidenti)}$$

la disequazione sarà soddisfatta da tutti i valori di x tranne 2, quindi scriveremo $x \neq 2$

4) $4x^2 - 4x + 1 < 0$ risolviamo l'equazione associata:

$$x_{1/2} = \frac{+4 \pm \sqrt{16-16}}{8} = \frac{+4 \pm 0}{8} \rightarrow x_1 = +\frac{4}{8} = \frac{1}{2} \wedge x_2 = +\frac{4}{8} = \frac{1}{2} \text{ (soluzioni coincidenti)}$$

la disequazione non ammetterà soluzioni, quindi scriveremo $\boxed{\text{nessun valore di } x}$

5) $\boxed{x^2 - x - 4 > 0}$ risolviamo l'equazione associata:

$$x_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{1-16}}{2} = \frac{+1 \pm \sqrt{-15}}{2} \text{ l'equazione è impossibile (nessuna soluzione)}$$

la disequazione sarà soddisfatta da tutti i valori di x , quindi scriveremo $\boxed{\forall x \in R}$

6) $\boxed{3x^2 - 4x + 2 < 0}$ risolviamo l'equazione associata:

$$x_{1/2} = \frac{+4 \pm \sqrt{16-24}}{6} = \frac{+4 \pm \sqrt{-8}}{6} \text{ l'equazione è impossibile (nessuna soluzione)}$$

la disequazione non ammetterà soluzioni, quindi scriveremo $\boxed{\text{nessun valore di } x}$

ESERCIZI

1) $x^2 + 7x + 6 > 0$ $[x < -6 \vee x > -1]$

2) $x^2 - 4x + 3 < 0$ $[1 < x < 3]$

3) $2x^2 + 3x - 2 \geq 0$ $\left[x \leq -2 \vee x \geq \frac{1}{2} \right]$

4) $2x^2 + 5x + 6 \geq 0$ $[\forall x \in R]$

5) $3x^2 + 2x - 1 < 0$ $\left[-1 < x < \frac{1}{3} \right]$

6) $4x^2 + 12x + 9 > 0$ $\left[x \neq -\frac{3}{2} \right]$

7) $5x^2 - 6x + 2 < 0$ $[\text{nessun valore di } x]$

8) $x^2 + 10x + 25 \geq 0$ $[\forall x \in R]$

9) $3x^2 + 12 < 0$ $[\text{nessun valore di } x]$

10) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$ $[x = 3]$

11) $(2x-3)^2 - 3(1-4x) - 7 > 0$ $\left[x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq +\frac{1}{2} \right]$

12) $\frac{(2-x)(2+x)}{3} - \frac{1-3x}{5} > \frac{6}{5} - x - \frac{1+x^2}{15}$ $[0 < x < 6]$

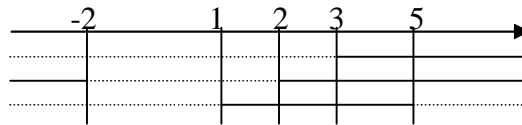
Sistemi di disequazioni

Un sistema di disequazioni è soddisfatto dai valori che verificano contemporaneamente tutte le disequazioni presenti in esso.

Si risolvono, una ad una, tutte le disequazioni del sistema e si rappresentano i risultati in un unico grafico (una linea per ogni disequazione) accettando solo le soluzioni che soddisfano contemporaneamente tutte le disequazioni (intervallo in cui coincidono le linee continue).

ESEMPIO:

$$\begin{cases} 4x - 12 > 0 \\ x^2 - 4 > 0 \\ x^2 - 6x + 5 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x_{1/2} = \pm 2 \text{ (accetta valori esterni)} \\ x_1 = 1 \text{ e } x_2 = 5 \text{ (accetta valori interni)} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x < -2 \vee x > 2 \\ 1 < x < 5 \end{cases}$$



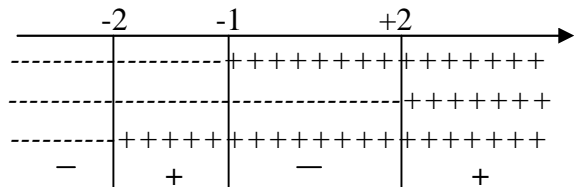
il sistema è verificato per $\boxed{3 < x < 5}$

Disequazioni di grado superiore al secondo

Si risolvono scomponendole nel prodotto di polinomi di primo e di secondo grado. Si determina, poi, il segno di ogni singolo polinomio (ponendoli sempre > 0) per determinare, confrontando tali segni, gli intervalli positivi e negativi e verificando così in quali la disequazione è soddisfatta.

ESEMPIO: $x^3 + x^2 - 4x - 4 < 0 \rightarrow (x+1)(x^2 - 4) < 0 \rightarrow (x+1)(x-2)(x+2) < 0$

$$\begin{aligned} 1^a) \quad x + 1 > 0 &\Rightarrow x > -1 \\ 2^a) \quad x - 2 > 0 &\Rightarrow x > +2 \\ 3^a) \quad x + 2 > 0 &\Rightarrow x > -2 \end{aligned}$$



la disequazione è verificata per $\boxed{x < -2 \vee -1 < x < +2}$

Disequazioni fratte

Una disequazione è fratta se contiene l'incognita anche, o solo, al denominatore.

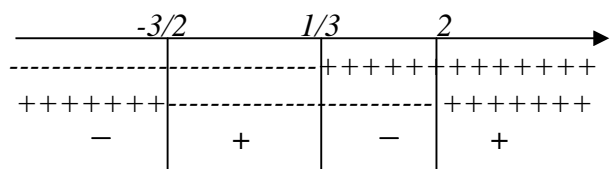
Si risolvono riconducendole sempre nella forma $A(x)/B(x)$ (quoziente di due polinomi).

Si determina, poi, il segno del numeratore e del denominatore (ponendoli sempre > 0) per determinare, confrontando tali segni, gli intervalli positivi e negativi e verificando così in quali la disequazione è soddisfatta.

ESEMPIO: $\frac{11}{2x+3} < \frac{5}{2-x} \rightarrow \frac{11}{2x+3} - \frac{5}{2-x} < 0 \rightarrow \frac{-21x+7}{2x^2-x-6} < 0 \rightarrow \frac{21x-7}{2x^2-x-6} > 0$

N: $21x - 7 > 0 \Rightarrow x > 1/3$

D: $2x^2 - x - 6 > 0 \Rightarrow x < -3/2 \vee x > 2$



la disequazione è verificata per $\boxed{-\frac{3}{2} < x < \frac{1}{3} \vee x > 2}$

ESERCIZI

Negli esercizi tratteremo solo i sistemi e le disequazioni fratte

$$1) \begin{cases} 3x - 2 \leq 0 \\ x + 5 > 0 \end{cases} \quad \left[-5 < x \leq \frac{2}{3} \right]$$

$$2) \begin{cases} 2(x+1) < 7-x \\ 3(x+4) > 2+3(2x-1) \end{cases} \quad \left[x < \frac{5}{3} \right]$$

$$3) \begin{cases} 2x - 5 > 0 \\ 2 - x > 0 \end{cases} \quad [\text{nessun valore di } x]$$

$$4) \begin{cases} \frac{x-1}{3} + \frac{x-2}{2} < 2 \\ x - \frac{3-x}{2} \geq 1 \end{cases} \quad \left[\frac{5}{3} \leq x < 4 \right]$$

$$5) \begin{cases} 3x^2 - 5x - 2 > 0 \\ x^2 - 4x + 3 < 0 \end{cases} \quad [2 < x < 3]$$

$$6) \begin{cases} x^2 + 3x - 4 \geq 0 \\ x^2 - 5x + 6 \geq 0 \end{cases} \quad [x \leq -4 \vee 1 \leq x \leq 2 \vee x \geq 3]$$

$$7) \frac{3x-2}{x+5} > 0 \quad \left[x < -5 \vee x > \frac{2}{3} \right]$$

$$8) \frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - x - 6} < 0 \quad [-2 < x < 1 \vee 3 < x < 6]$$

$$9) \frac{3x^2 - 5x + 2}{3x^2 + 4x - 4} \leq 0 \quad \left[-2 < x < \frac{2}{3} \vee \frac{2}{3} < x \leq 1 \right]$$