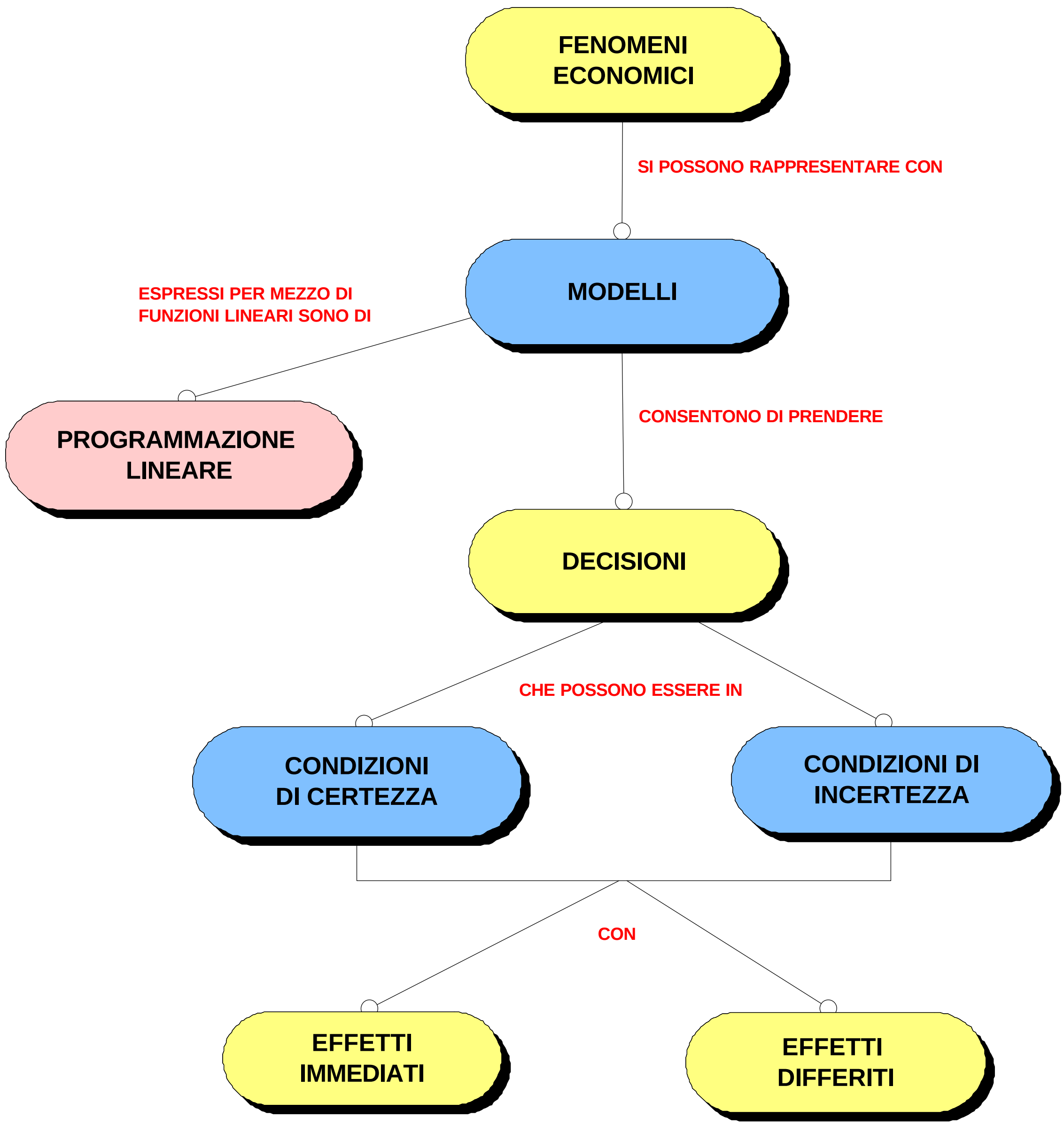
RICERCA OPERATIVA

DEFINIZIONE

Metodo scientifico per la soluzione di problemi decisionali riguardanti generalmente l'assegnazione di risorse limitate,

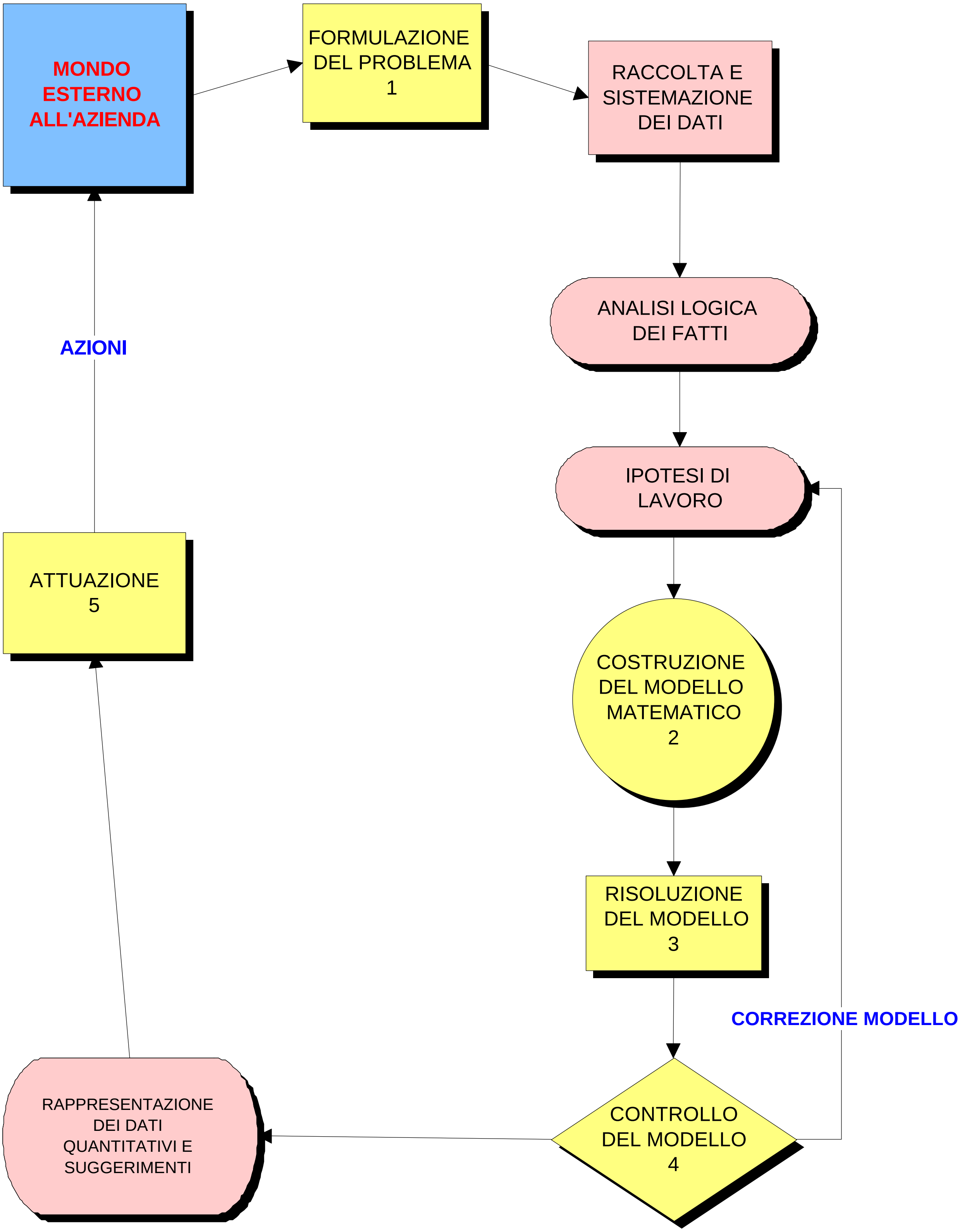
MAPPA CONCETTUALE



DEFINIZIONE DI P.L.

Un problema di Programmazione Lineare è un particolare problema di Ricerca Operativa che si pone ogni qualvolta si debbano assegnare, in modo ottimale, risorse ad attività fra loro competitive.

LE FASI DELLA RICERCA OPERATIVA



UNITA’ DIDATTICA

PROGRAMMAZIONE LINEARE

Francesco Norato

SCHEDA DI PROGRAMMAZIONE

Tipologia di Istituto: **IPSTC - IPSSAR - ITG "Progetto 5" - (ITC "Igea")**		
Anno Scolastico: 1999 - 2000	Classe: **Quinta**	Sez:
Disciplina: Matematica ed informatica	Insegnante:	
Monte ore settimanali: **Tre**	Modulo: **RICERCA OPERATIVA**	
Unità didattica: **PROGRAMMAZIONE LINEARE**		

Prerequisiti:

- Il piano cartesiano
- Geometria analitica della retta
- Sistemi di equazioni lineari
- Disequazioni lineari a due variabili
- Fondamenti di Ricerca Operativa

Obiettivi Generali:

- Individuare e costruire relazioni e corrispondenze
- Matematizzare problemi in vari ambiti disciplinari
- Saper analizzare modelli matematici
- Previsione, sviluppo e controllo di processi matematici
- Affinare le capacità di deduzione

Obiettivi Specifici:

Conoscenze
- Conoscere finalità e metodi della Ricerca Operativa
- Comprendere la nozione di modello, campo di scelta
- Conoscere i concetti base della Programmazione Lineare
- Conoscere la tecnica di risoluzione grafica di problemi di PL a due variabili

Competenze
- Saper riconoscere un problema di competenza della PL
- Saper analizzare un problema di PL, individuandone i dati fondamentali
- Acquisire la consapevolezza dell'esistenza di metodi matematici per la risoluzione di problemi di ottimizzazione in ambito economico/aziendale
- Saper formalizzare un problema di PL (capacità di modellizzazione)
- Saper risolvere problemi di PL a due variabili col metodo algebrico (grafico)
- Saper riconoscere un problema di PL a più variabili (riconducibile a un problema a due variabili) e risolverlo col metodo grafico
- Saper analizzare criticamente i risultati ottenuti

Contenuti: • Richiami sulla RO: definizioni e fasi della RO (mappe concettuali) 1 h • Definizione di un problema di PL 1 h • Formulazione di un modello di PL e terminologia 4 h *Esempio: Problema della dieta* • Risoluzione di un problema col metodo grafico: 8 h a) Regione ammissibile b) Curve di livello c) Soluzioni ammissibili e soluzione ottima d) Vincoli tecnici e vincoli di segno [Verifica formativa (test breve)] *Esempio: Problema di produzione* • Esempi applicativi di tipo economico/aziendale 4 h [Verifica formativa (risoluzione di un caso)] [Verifica sommativa (prova strutturata)]
Metodologia: • Lezione frontale • Problem Solving • Lavori di gruppo • Attività di laboratorio
Mezzi e strumenti di lavoro: • Libro di testo • Lucidi esplicativi • Schemi riassuntivi • Cd-Rom multimediali • Il software "Statist" Ambiente: Aula - Laboratorio di informatica
Attività di Recupero/Approfondimento: Recupero: * Modellizzazione di un problema di PL * Risoluzione di semplici casi col metodo grafico Approfondimento: * Interpretazione del problema del "duale" e del significato economico della coincidenza dei due ottimi *Esempio: il duale del problema della dieta*
Tempi: 18 ore (comprensive delle verifiche e delle attività di laboratorio)
Verifiche: n° 2 Formative n° 1 Sommativa

ESEMPIO DI PROGRAMMAZIONE LINERARE

PROBLEMA DELLA DIETA

UNA MASSAIA VUOLE RICAVARE UNA DIETA A COSTO MINIMO DA SEI (6) CIBI FONDAMENTALI (1,2,3,4,5,6) IN MODO TALE CHE LA DIETA CONTENGA ALMENO NOVE (9) UNITÀ DI VITAMINA ‘A’ E DICIANNOVE (19) DI VITAMINA ‘B’.

	UNITA’ DI VITAMINA /KG						Q. MIN. VITAMINA RICHIESTA DALLA DIETA
ALIMENTI	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
VITAMINA ‘A’	**1**	**0**	**2**	**2**	**1**	**2**	**9**
VITAMINA ‘B’	**0**	**1**	**3**	**1**	**3**	**2**	**19**
COSTO (CENTS/KG)	**35**	**30**	**60**	**50**	**27**	**22**	

POSTO X_J = KG DELL’ALIMENTO J, IL PROBLEMA SI TRADUCE

NEL MINIMIZZARE LA SEGUENTE FUNZIONE OBIETTIVO:

$$\textbf{MIN } 35X_1 + 30X_2 + 60X_3 + 50X_4 + 27X_5 + 22X_6$$

IMPONENDO I SEGUENTI VINCOLI:

$$\begin{cases} X_1 + \quad + 2X_3 + 2X_4 + X_5 + 2X_6 \geq 9 \\ X_2 + 2X_3 + X_4 + 3X_5 + 2X_6 \geq 19 \\ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \geq 0 \end{cases}$$

PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE LINERARE

Un reparto di un’azienda industriale produce due tipi A e B di uno stesso componente meccanico. Il reparto dispone giornalmente di 30 Kg di materiale grezzo, di tre operai con un turno di 8 ore e di una macchina automatica gestita da un tecnico che effettua un turno di lavoro di 5 ore e 30 minuti.
Il componente A richiede 3 Kg di materiale grezzo, 2 ore di lavoro manuale e 15 minuti di lavoro a macchina; il tipo B richiede 3 Kg di materiale grezzo, 4 ore di lavoro manuale e 1 ora di lavoro a macchina.
Il profitto dell’azienda su un componente di componente di tipo A è di £. 60.000, mentre quello sul tipo B è di £. 100.000.
Quanti componenti di tipo A e quanti di tipo B devono produrre giornalmente il reparto affinché il profitto dell’azienda sia il massimo possibile?

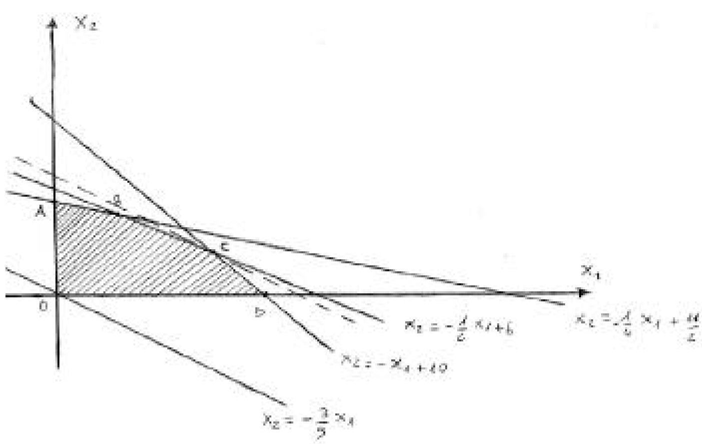
	RISORSE		
Prodotti	Materiale grezzo	Lavoro Manuale	Lavoro Macchina
A	**3**	**2**	**¼**
B	**3**	**4**	**1**
Disponibilità	**30**	**24**	**11/2**

$$\begin{cases} 3X_1 + 3X_2 \leq 30 \\ 2X_1 + 4X_2 \leq 24 \\ 1/4X_1 + X_2 \leq 11/2 \\ X_1 \geq 0 \\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

MASSIMIZZARE: $Z = 60.000X_1 + 100.000X_2$

RETTE ASSOCIATE ALLE DISEQUAZIONI:

$X_2 = -X_1 + 10$
$X_2 = -1/2X_1 + 6$
$X_2 = -3/5X_1$
$X_2 = -1/4X_1 + 11/2$



$Z = 60.000X_1 + 100.000X_2$

Z = 680.000 lire.

VERIFICA FORMATIVA (RISOLUZIONE DI UN CASO)

Tre industrie D_1, D_2, D_3 necessitano, giornalmente, di 200 q., 300 q. e 400 q. di merce rispettivamente. Le tre industrie hanno la possibilità di rifornirsi da due magazzini M1 e M2, che contengono rispettivamente 300 q. e 600 q. di merce. La spesa di trasporto in £/q. da ogni magazzino alle tre industrie, è riportata nella tabella seguente:

	D1	D2	D3
M1	1200	2000	1800
M2	1800	1800	2200

Determinare quanti quintali di merce devono essere inviati dai magazzini alle industrie D_1, D_2, D_3 in modo da avere la minima spesa totale di trasporto.

TABELLA PUNTEGGI

FASI DEL PROBLEMA	PUNTEGGIO
Formulazione del modello	4
Trasformazione nell'equivalente modello in 2 variabili	10
Rappresentazione grafica della regione ammissibile	5
Determinazione della soluzione ottima	3
Interpretazione del risultato	2
TOTALE	24

GRIGLIA DI VALUTAZIONE

PUNTEGGI	1	2-3	4-6	7-9	10-12	13-15	16-18	19-21	22-23	24
VOTO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

APPROFONDIMENTO

Formulazione di problemi “duali” ed interpretazione economica della coincidenza dei valori ottimi primale-duale.

Esempio: **Duale del problema della dieta**

Un produttore ha l’idea di sfruttare il problema della dieta della massaia per i propri interessi, si propone cioè di fabbricare pillole sintetiche di vitamine e di immetterle sul mercato in modo tale che siano concorrenziali rispetto ai cibi fondamentali e, quindi, massimizzare i propri guadagni.
Posto

y_i = prezzo (cents/unità) di vendita delle pillole di vitamina i

la formulazione del problema è la seguente:

$$\max \quad 9y_1 + 19y_2$$

$$\begin{cases} y_1 \le 35 \\ y_2 \le 30 \\ 2y_1 + 3y_2 \le 60 \\ 2y_1 + y_2 \le 50 \\ y_1 + 3y_2 \le 27 \\ 2y_1 + 2y_2 \le 22 \\ y_1, \quad y_2 \ge 0 \end{cases}$$

VINCOLI DI PREZZO:

SENZA QUESTI VINCOLI LA MASSAIA NON COMPRERÁ LE PILLOLE MA I CIBI

↓

RILASCIANDOLI, IL PRODUTTORE SUBIREBBE UNA PERDITA INVECE CHE UN MAGGIOR GUADAGNO

INTERPRETAZIONE ECONOMICA

Si può dimostrare formalmente che il valore ottimo primale coincide con il valore ottimo duale.

PERCHÉ?

Modello di equilibrio economico. La massaia ha convenienza a comprare le pillole fintanto che il costo che sosterrebbe procurandosi i cibi fondamentali è maggiore o al più uguale al prezzo propostogli. D'altra parte il produttore cerca di ottenere il più alto ricavo possibile e non ha convenienza a fissare un prezzo Y^* tale che $CX>Y^*B$ poiché egli sa che riuscirebbe a vendere i beni anche ad un prezzo leggermente superiore.

STRUMENTI: Lettura testi e articoli; appunti redatti dall’insegnante

STIMOLO: Formulazione di una coppia P-D in due incognite e risoluzione di entrambi con il metodo grafico.

VERIFICA SOMMATIVA (PROVA STRUTTURATA)

1) RISPONDERE AI SEGUENTI QUESITI

a) Un PPL ammette sempre soluzione ottima?

……………………………………………..………………………………………………………………………

b) Qual è la condizione sufficiente affinché un PPL abbia soluzione ottima?

……………………………………………..………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………..……………………………
……………………………………………..………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………..……………………………

c) Quali caratteristiche deve avere la regione ammissibile affinché un PPL abbia sempre soluzione ottima?

……………………………………………..………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………..……………………………
……………………………………………..………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………..……………………………

TABELLA DEI PUNTEGGI

ESERCIZIO	PUNTEGGIO
1	3
2	2
3	4
4	5
5	10
TOTALE	24

GRIGLIA DI VALUTAZIONE

PUNTEGGI	1	2-3	2-6	7-9	10-12	13-15	16-18	19-21	22-23	24
VOTO	1	2	3	4	4	5	6	7	8	9