

Studio di Funzioni

VI.1 Cosa significa studiare una funzione

Lo scopo dello studio di una funzione è quello di rappresentare la funzione stessa con un grafico sul piano cartesiano quando essa viene data nella sua forma analitica.

Per far ciò è necessario ricercare alcune caratteristiche salienti della funzione, che, considerate assieme, consentono di ricavare il grafico cercato.

Le caratteristiche da ricercare, cui ci riferiamo, sono:

- 1) **Il campo di esistenza (C.E.) della funzione;**
- 2) **Le eventuali intersezioni con gli assi;**
- 3) **I rami crescenti e decrescenti;**
- 4) **I punti di massimo e di minimo relativo;**
- 5) **La concavità, la convessità, i punti di flesso;**
- 6) **Gli eventuali asintoti.**

VI.2 Il campo di esistenza (C.E.) della funzione

Quando abbiamo definito una funzione reale [cap. II], abbiamo detto che essa consiste in una relazione tra la x (variabile indipendente o argomento della funzione) e la y (variabile dipendente) tale che $y = f(x)$. Si è detto inoltre che la y deve sempre risultare reale (altrimenti non potremmo parlare di *funzione reale di variabile reale*).

Tuttavia, tra tutte le operazioni che si possono fare sulla variabile indipendente, ce ne sono alcune che possono rendere la y non reale, per esempio l'estrazione della radice quadrata di un numero negativo, il calcolo del logaritmo di un numero negativo, ecc.

Ciò comporta che alla variabile indipendente si possono dare solo quei valori che rendono la y reale e che non le facciano perdere significato. La ricerca di questi valori costituisce il **campo di esistenza** o **dominio di definizione** della funzione.

Si dice campo di esistenza (C.E.) o dominio di definizione (D) l'insieme dei valori che si possono attribuire alla variabile indipendente x affinché la funzione y assuma valori reali e non perda significato.

VI.3 Le intersezioni con gli assi

Gli assi cartesiani x e y sono caratterizzati dal fatto che il loro punti hanno rispettivamente ordinata nulla e ascissa nulla, quindi le loro equazioni sono $y=0$ e $x=0$. Per determinare le eventuali intersezioni con gli assi si pone nella funzione:

- 1) $x=0$ se il valore zero appartiene al C.E., e si trova l'unico eventuale punto di intersezione con l'asse y (che si leggerà $P_y[0, f(0)]$).
- 2) $y=0$ e risolvendo l'equazione $f(x)=0$ si trovano i punti d'intersezione con l'asse x .

VI.4 Crescenza, decrescenza, punti di massimo e di minimo

Per determinare se una funzione è **crescente** o **decrescente** in un intervallo si utilizza la nozione di derivata. A tale scopo enunciamo il seguente teorema:

Se una funzione $f(x)$ è continua in un intervallo $[a, b]$ e se nell'intervallo aperto (a, b) esiste la sua derivata $f'(x)$ ed è sempre positiva, allora la funzione in $[a, b]$ è crescente. Se $f'(x)$ è sempre negativa, la funzione è decrescente.

Da ciò si deduce che è necessario il calcolo e lo studio della derivata prima.

Tuttavia, il calcolo della derivata prima è anche necessario per determinare eventuali punti di **massimo** (punti in cui la funzione assume un valore non minore dei valori che essa assume negli altri punti di $[a, b]$) o di **minimo** (punti in cui la funzione assume un valore non maggiore dei valori che essa assume negli altri punti di $[a, b]$) (punti detti *estremanti*) della funzione in questione, per cui è possibile con un unico procedimento ricavare tutte queste caratteristiche:

- 1) Si calcola, innanzitutto, la derivata prima y' della funzione;
- 2) Si studia, poi, il segno della y' , cioè si cercano gli intervalli di (a, b) in cui la derivata è positiva (per individuare se è si tratta di una curva crescente) e quelli dove è negativa (curva decrescente).
- 3) Si verifica, infine, se la derivata si annulla per i valori di x ove essa inverte il suo segno (in essi, se esistono, si avranno punti di massimo o di minimo).

Tutto ciò appare sicuramente semplificato se esaminiamo il seguente esempio:

Si cerchino i punti di massimo e di minimo della seguente funzione e si individuino gli intervalli di crescita e decrescenza:

$$y = x^3 - 3x^2 + 2$$

1) Si calcola la derivata prima:

$$y' = f'(x) = 3x^2 - 6x$$

2) Si studia il segno della derivata (ponendo prima $y' > 0$ e poi $y' < 0$):

$$y' > 0 \Rightarrow 3(x^2 - 2x) > 0 \Rightarrow x^2 - 2x > 0$$

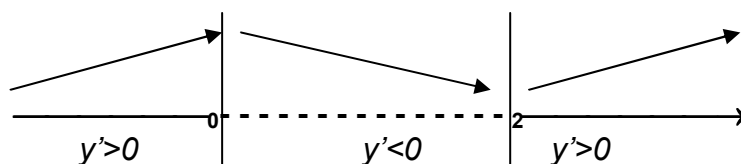
da cui, risolvendo: $x < 0$ e $x > 2$.

$$y' < 0 \Rightarrow 3(x^2 - 2x) < 0 \Rightarrow x^2 - 2x < 0$$

da cui: $0 < x < 2$.

Dato che la derivata prima è positiva per tutti i valori < 0 e per tutti i valori > 2 , si conclude affermando che la funzione in questione è crescente in questi intervalli.

Inoltre, dato che la stessa derivata è negativa per tutti i valori compresi tra 0 e 2 si conclude che in tale intervallo la funzione è decrescente.



3) Infine, poiché la derivata prima si annulla per i valori 0 e 2, ossia $f'(0)=0$ e $f'(2)=0$, si conclude che in $x=0$ c'è un massimo e in $x=2$ c'è un minimo (come si evince anche osservando il grafico e il senso delle frecce).

Concludendo, dallo studio della derivata prima della funzione esempio abbiamo ricavato le seguenti informazioni:

- a. Per valori minori di 0 la funzione è crescente;
- b. In $x=0$ la funzione ha un massimo;
- c. Per valori compresi tra 0 e 2 la funzione decresce;
- d. In $x=2$ la funzione ha un minimo;
- e. Per valori maggiori di 2 la funzione è crescente.

VI.5 Concavità, convessità, punti di flesso

Le informazioni relative alla concavità, alla convessità e agli eventuali punti di flesso si ricavano dallo studio della derivata della derivata, detta anche derivata seconda. Si procede nel modo seguente:

- 1) Si calcola, innanzitutto, la derivata seconda y'' della funzione;
- 2) Si studia, poi, il segno della y'' , cioè si cercano gli intervalli in cui la derivata seconda è positiva (in essi la curva volge la **concavità verso l'alto**) e gli

intervalli in cui la derivata seconda è negativa (in essi la curva volge la **concavità verso il basso** detta anche **convessità**).

- 3) Si pone poi la $y'' = 0$. Se l'equazione ha soluzione, in quel valore la curva ha un **punto di flesso** (ossia in esso la curva inverte la sua concavità).

Esempio:

Si cerchino i punti di flesso della precedente funzione e se ne determini la concavità e la convessità:

$$y = x^3 - 3x^2 + 2$$

- 1) Si calcola la derivata prima e successivamente la derivata seconda:

$$y' = f'(x) = 3x^2 - 6x \qquad y'' = f''(x) = 6x - 6$$

- 2) Si studia il segno della derivata seconda (ponendo prima $y'' > 0$ e poi $y'' < 0$):

$$y'' > 0 \Rightarrow 6x - 6 > 0 \qquad \Rightarrow \qquad x - 1 > 0$$

da cui, risolvendo: $x > 1$.

$$y'' < 0 \Rightarrow 6x - 6 < 0 \qquad \Rightarrow \qquad x - 1 < 0$$

da cui: $x < 1$.

Dato che la derivata seconda è positiva per tutti i valori > 1 si conclude affermando che la funzione in questione è **concava verso l'alto** in questo intervallo.

Inoltre, dato che la stessa derivata seconda è negativa per tutti i valori < 1 si conclude che in tale intervallo la funzione è **concava verso il basso o convessa**.

- 3) Infine, poiché la derivata seconda si annulla per il valore 1, ossia $f''(1) = 0$ si conclude che in $x = 1$ c'è un punto di flesso.

Concludendo, dallo studio della derivata seconda della funzione esempio abbiamo ricavato le seguenti informazioni:

- a. Per valori minori di 1 la funzione è concava verso il basso o convessa;
- b. In $x = 1$ la funzione ha un punto di flesso;
- c. Per valori maggiori di 1 la funzione è concava verso l'alto.

VI.6 Asintoti

Si consideri una funzione $y = f(x)$ che da un certo valore di x in poi abbia la caratteristica di avvicinarsi sempre più ad una retta senza mai toccarla. La retta in questione si dice **asintoto** della funzione. Chiaramente, ciò può verificarsi quando almeno uno degli estremi del C.E. è infinito. Vediamo quali tipi di asintoti esistono e come si procede per individuarli.

VI.6.1 Asintoti orizzontali

Si calcola il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

Se il limite esiste ed è uguale a un valore finito k si dice che la retta $y=k$ rappresenta un **asintoto orizzontale** per la curva.

Se invece è:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = h$$

la curva avrà due asintoti orizzontali, e rispettivamente le rette: $y = k$ e $y = h$. La prima retta prende il nome di *asintoto orizzontale destro*, la seconda di *asintoto orizzontale sinistro*.

VI.6.2 Asintoti verticali

Si calcolano i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$$

Se il primo limite o il secondo o entrambi sono uguali a $\pm \infty$ si dice che la retta $x=c$ rappresenta un **asintoto verticale** per la curva.

VI.6.3 Asintoti obliqui

Come vedere, durante lo studio di una funzione, se essa presenta un asintoto obliquo? E come determinarlo?

Si ricordi che una qualunque retta del piano ha equazione:

$$y = mx + q$$

Tra tutte queste rette quella tangente alla curva all'infinito ha parametro angolare:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) \quad (\text{Si ricordi il significato geometrico della derivata}).$$

Il valore di q si ottiene calcolando:

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx]$$

Possono verificarsi i seguenti casi:

$$1) \quad m = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{non esiste asintoto obliquo} \\ l & \\ \infty & \text{non esiste asintoto obliquo} \end{cases}$$

$$2) \quad m = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \begin{cases} 0 \\ \lambda \\ \infty \end{cases} \quad \text{non esiste asintoto obliquo}$$

Quindi, se uno dei limiti è infinito, l'asintoto obliquo non esiste, se ambedue sono finiti (con $m \neq 0$) l'asintoto obliquo esiste.

VI.7 Un esempio di studio di funzione

Studiare la funzione:

$$y = \frac{x}{1+x^2}$$

1) Campo di esistenza:

Poiché si tratta di una funzione razionale fratta, il C.E. sarebbe dato da tutti i valori della x che non annullano il denominatore; ma riflettendo, si osserva che il denominatore non potrà mai essere nullo, in quanto la somma tra 1 e il quadrato di x non potrà mai essere una quantità negativa. Si conclude affermando che il C.E. della funzione è dato da tutto l'insieme \mathcal{R} dei numeri reali.

2) Intersezioni con gli assi:

2.1) Per determinare l'eventuale intersezione con l'asse delle y , poniamo $x=0$. Si ottiene:

$$y = \frac{0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0$$

Il punto $P(0, 0)$ rappresenta l'intersezione con l'asse delle ordinate.

2.2) Per determinare l'eventuale intersezione con l'asse delle x , poniamo $y=0$. Si ottiene:

$$\frac{x}{1+x} = 0 \quad \text{da cui: } x = 0.$$

Il punto $P(0, 0)$ rappresenta l'intersezione con l'asse delle ascisse.

Si conclude affermando che il punto $P(0, 0)$ rappresenta l'unico punto di intersezione della funzione con gli assi coordinati.

3) Crescenza, decrescenza, punti di massimo e di minimo.

Si calcola la derivata prima della funzione:

$$y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

Si pone la y' maggiore di zero e si risolve la disequazione:

$$\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} > 0$$

Poiché il denominatore, essendo un quadrato, è necessariamente una quantità positiva, è necessario che anche il numeratore (affinché il quoziente sia una quantità positiva) sia maggiore di zero:

$$1-x^2 > 0 \Rightarrow -1 < x < 1$$

Dato che la derivata prima è positiva per tutti i valori compresi tra -1 e 1 , si conclude affermando che la funzione in questione è **crescente** in questo intervallo.

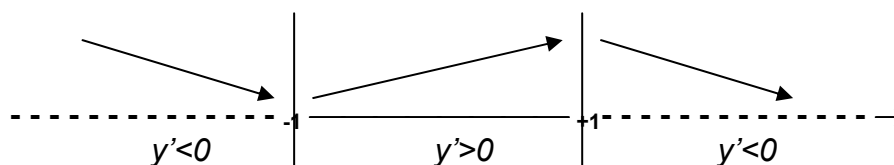
Si pone, poi, la y' minore di zero e si risolve la disequazione:

$$\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} < 0$$

Poiché il denominatore, essendo un quadrato, è necessariamente una quantità positiva, è necessario che il numeratore (affinché il quoziente sia una quantità negativa) sia minore di zero:

$$1-x^2 < 0 \Rightarrow x < -1 \text{ e } x > 1$$

Dato che la derivata prima è negativa per tutti i valori minori di -1 e maggiori di 1 , si conclude affermando che la funzione in questione è **decrescente** in questi intervalli.



Infine, poiché la derivata prima si annulla per i valori -1 e $+1$, ossia $f'(-1)=0$ e $f'(1)=0$, si conclude che in $x=-1$ c'è un minimo e in $x=1$ c'è un massimo (come si evince anche osservando il grafico e il senso delle frecce).

Concludendo, dallo studio della derivata prima della funzione abbiamo ricavato le seguenti informazioni:

- a. Per valori minori di -1 la funzione è decrescente;
- b. In $x=-1$ la funzione ha un minimo;
- c. Per valori compresi tra -1 e 1 la funzione cresce;
- d. In $x=1$ la funzione ha un massimo;
- e. Per valori maggiori di 1 la funzione è decrescente.

4) Concavità, convessità e punti di flesso:

Si calcola la derivata seconda della funzione:

$$y'' = \frac{2x(x^2 - 3)(1 + x^2)}{(1 + x^2)^4} = \frac{2x(x^2 - 3)}{(1 + x^2)^3}$$

Si studia il segno della derivata seconda (ponendo prima $y'' > 0$ e poi $y'' < 0$):

$$y'' > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2x(x^2 - 3)}{(1 + x^2)^3} > 0 \quad \Rightarrow \quad 2x(x^2 - 3) > 0$$

da cui, risolvendo: $x > \sqrt{3}$ e $-\sqrt{3} < x < 0$.

$$y'' < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2x(x^2 - 3)}{(1 + x^2)^3} < 0 \quad \Rightarrow \quad 2x(x^2 - 3) < 0$$

da cui, risolvendo: $x < -\sqrt{3}$ e $0 < x < \sqrt{3}$.

Dato che la derivata seconda è positiva per tutti i valori $x > \sqrt{3}$ e $-\sqrt{3} < x < 0$ si conclude affermando che la funzione in questione è **concava verso l'alto** in questi intervalli.

Inoltre, dato che la stessa derivata seconda è negativa per tutti i valori $x < -\sqrt{3}$ e $0 < x < \sqrt{3}$ si conclude che in tali intervalli la funzione è **concava verso il basso o convessa**.

Infine, poiché la derivata seconda si annulla per i valori $x = -\sqrt{3}, x = 0, x = \sqrt{3}$ si conclude affermando che essi sono altrettanti punti di flesso per la funzione.

Riepilogando, dallo studio della derivata seconda, abbiamo tratto le seguenti informazioni:

- a. Per valori $x < -\sqrt{3}$ e $0 < x < \sqrt{3}$ la funzione è concava verso il basso o convessa;
- b. In $x = -\sqrt{3}, x = 0, x = \sqrt{3}$ la funzione ha altrettanti punti di flesso;
- c. Per valori $x > \sqrt{3}$ e $-\sqrt{3} < x < 0$ la funzione è concava verso l'alto.

5) Asintoti

Si verifica l'esistenza di asintoti orizzontali:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Poiché il limite è finito, si conclude affermando che la retta $y=0$ è un asintoto orizzontale per la funzione. Non esistono altri asintoti.

6) Grafico della funzione

Grafico della Funzione

