APPUNTI DI ANALISI APPLICATA
AI PROBLEMI DI ECONOMIA

L'ECONOMIA E LE FUNZIONI DI UNA VARIABILE.

In ogni società esistono produttori di beni, commercianti ed acquirenti; in generale esiste un mercato in cui si scambiano beni.
Definiamo come:

- **bene** una qualsiasi merce immessa sul mercato, per esempio un computer, una casa, un prodotto alimentare;

- **domanda** la quantità di un certo bene richiesta ad un certo prezzo dal consumatore;

- **offerta** la quantità di un certo bene immessa sul mercato da chi lo produce;

- **mercato libero** un mercato costituito da molti produttori, molti acquirenti e né gli uni né gli altri sono in grado di influenzarlo;

- **mercato monopolistico** un mercato in cui c'è un solo produttore e molti acquirenti; in tale situazione il venditore può aumentare i prezzi e i compratori non possono fare altro che adeguarsi.

In generale i modelli matematici utili a rappresentare le funzioni economiche dovrebbero tenere conto, oltre del prezzo del bene, anche delle abitudini, della pubblicità, del modello politico ecc., con la conseguenza di dover trattare funzioni molto complesse.

Per semplicità, un primo approccio può essere fatto con modelli che legano la domanda e l'offerta di un bene al solo prezzo : **d = f(p)** e **o = g(p) con p≥0.**

Per la funzione della domanda in generale risulta che:

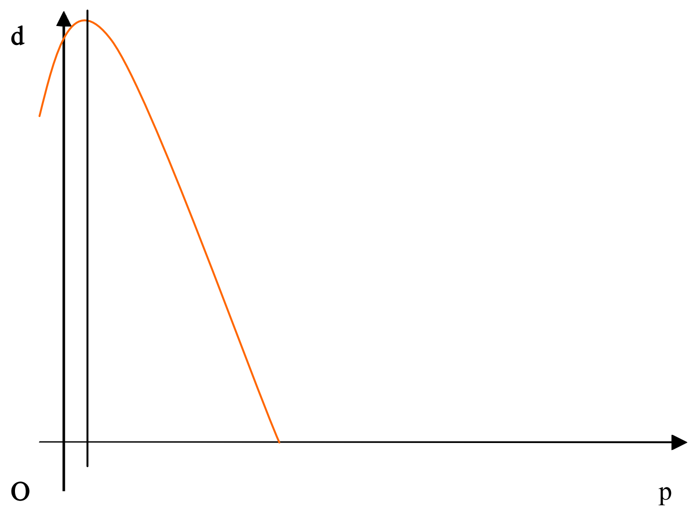
La domanda di un bene è una funzione non crescente del suo prezzo: se p aumenta d diminuisce o resta costante.

I modelli semplici, basati su funzioni decrescenti, che meglio si prestano a rappresentare la funzione domanda, sono i seguenti:

1. modello lineare: $d = mp + q$.

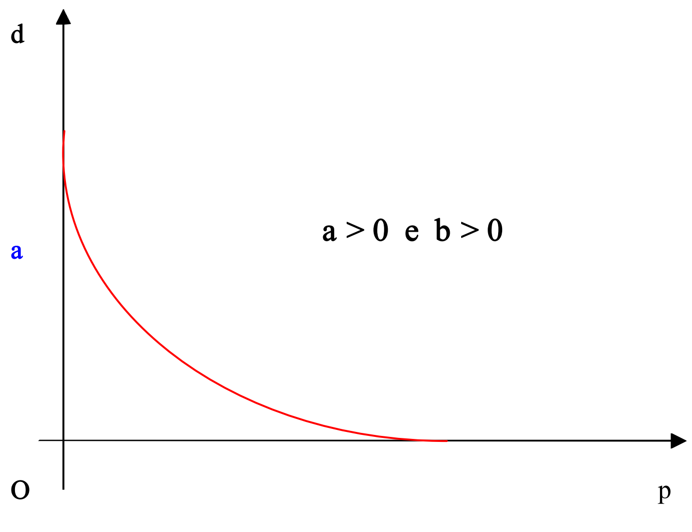
Necessariamente m dovrà essere negativo. Per $p = 0$ risulta $d = q$ che rappresenta la massima domanda (se il prezzo è nullo tutta la produzione viene richiesta dai consumatori). Per $d = 0$ risulta $p = - q/m$ che rappresenta il prezzo massimo oltre il quale nessun consumatore è disposto ad acquistare quel bene.

2. modello parabolico: $d = a\,p^2 + b\,q + c$.



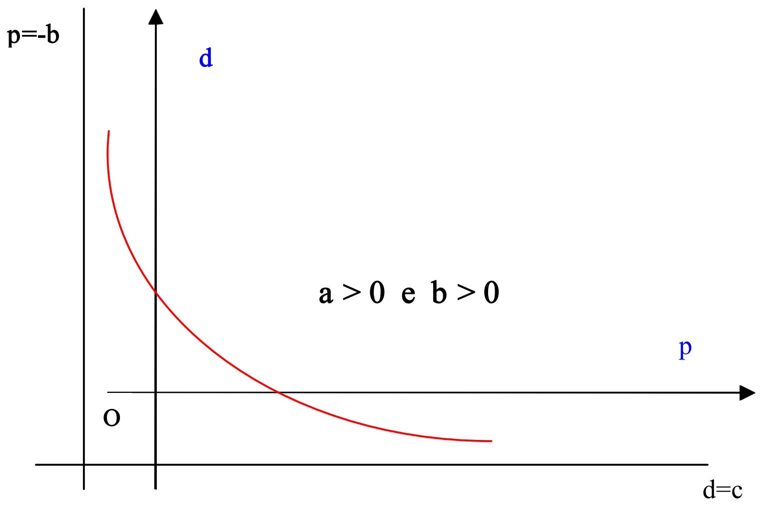
Ricordando che la domanda è una funzione decrescente dovrà essere a < 0. Necessariamente si dovrà considerare la parte decrescente del grafico, cioè quella che parte dal vertice della parabola.

3. modello esponenziale: $d = a\, e^{-bp}$.



Anche in questo caso per essere una funzione positiva e decrescente per $p \geq 0$ dovrà essere $a > 0$ e $b > 0$.

4. modello iperbolico: $d = \dfrac{a}{p+b} + c$



Anche in questo caso per essere una funzione positiva e decrescente per $p \geq 0$ dovrà essere $a > 0$ e $b > 0$. La funzione è rappresentata da una iperbole equilatera che ha per asintoti $p = -b$ e $d = c$.
Spesso in economia anzicchè studiare la funzione $d=f(p)$, si preferisce studiare la funzione inversa $p= f^{-1}(d)$ detta funzione di vendita.

In Economia si definisce elasticità della domanda la capacità della domanda di reagire alle variazioni di prezzo.

Si definisce coefficiente di elasticità della domanda ε_d il rapporto tra le variazioni relative della domanda e del prezzo:

$$\varepsilon_d = \frac{\frac{d2 - d1}{d1}}{\frac{p2 - p1}{p1}} = \frac{p1}{d1}\frac{\Delta d}{\Delta p}$$

Si è anche soliti considerare il valore assoluto di ε_d e distinguere i seguenti casi:

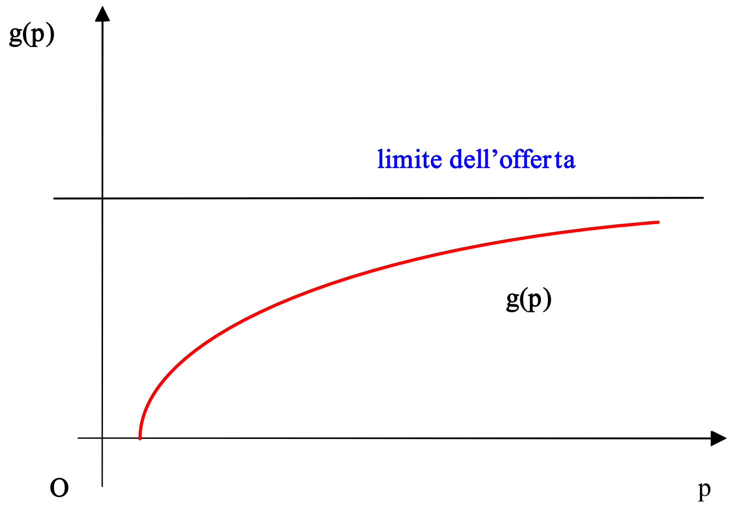
1. se $|\varepsilon_d| < 1$, si dice che la domanda è rigida o non elastica; all'aumentare del prezzo la domanda cala lentamente. È il caso dei beni di prima necessità come il latte, il pane, per i quali anche se il prezzo aumenta, i consumatori continuano ugualmente a farne uso.

2. se $|\varepsilon_d| > 1$, si dice che la domanda è elastica; all'aumentare del prezzo la domanda cala fortemente. È il caso dei beni voluttuari, per i quali se il prezzo aumenta, i consumatori cercano di farne a meno.

3. se $|\varepsilon_d| = 1$, si dice che la domanda è anelastica; al variare di un punto percentuale del prezzo, corrisponde una variazione unitaria della domanda.

Per la funzione dell'offerta in generale risulta che:

L'offerta di un bene è una funzione non decrescente del suo prezzo: se p aumenta g(p) aumenta o resta costante.
La funzione, inoltre, è limitata superiormente in quanto il produttore non riesce ad aumentare la produzione oltre un certo valore.

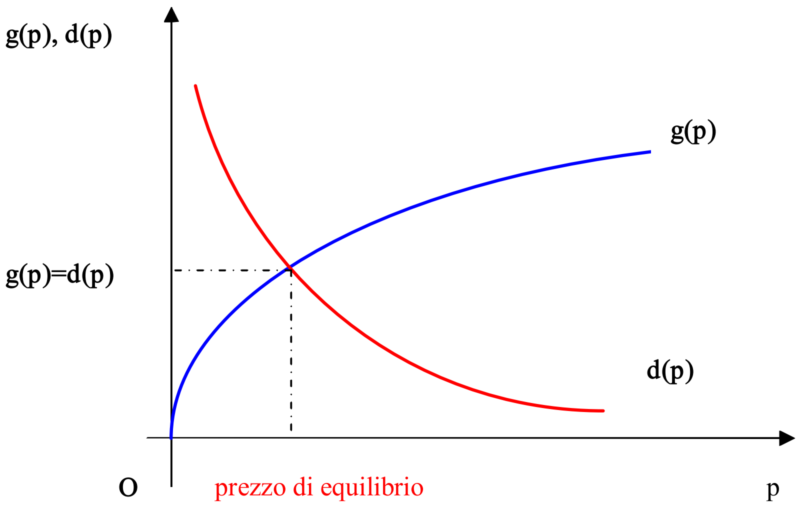


Anche per l'offerta si può considerare la funzione inversa $p = g^{-1}(d)$ detta funzione di produzione.
Anche per l'offerta si può parlare di elasticità, intesa come rapporto tra l'incremento relativo dell'offerta e quella del prezzo

Un modello semplificato della realtà economica è il mercato **in regime di concorrenza perfetta**, mercato nel quale si suppongono verificate le seguenti condizioni:

- il numero di dei consumatori così come quello dei produttori deve essere alto; in questo modo i primi non possono modificare il prezzo aumentando o diminuendo la domanda, i secondi aumentando o diminuendo la propria offerta;
- non devono esistere accordi tra produttori e consumatori in modo da influire sul prezzo;
- ogni produttore può vendere a qualsiasi consumatore e ogni consumatore può rivolgersi per acquistare a qualsiasi produttore;
- ogni consumatore e ogni produttore deve poter entrare o uscire a piacimento dal mercato;
- ogni consumatore e ogni produttore deve conoscere le condizioni che determinano la domanda e l'offerta, deve sussistere la trasparenza di mercato.

Con queste ipotesi, è possibile determinare il **prezzo di equilibrio** di un bene.



Il prezzo di equilibrio di un bene è il prezzo per il quale la domanda è uguale all'offerta.

La domanda e l'offerta possono variare nel tempo, di conseguenza anche il prezzo di equilibrio può subire modifiche.

1. se la **domanda resta costante**, ad una diminuzione dell'offerta corrisponde un aumento del prezzo di equilibrio e viceversa;
2. se **l'offerta resta costante**, ad una diminuzione della domanda corrisponde una diminuzione del prezzo di equilibrio e ad un aumento della domanda un aumento del prezzo di equilibrio;
3. se **domanda e offerta variano insieme**, il prezzo di equilibrio può aumentare, diminuire o restare costante.

ESEMPIO

La funzione della domanda di un bene è: $d(p) = 37440 - 60p$, quello dell'offerta è $g_1(p) = -29760 + 80p$.
Calcolare il prezzo di equilibrio e valutare come si modifica se l'offerta aumenta secondo la funzione $g_2(p) = -18560 + 80p$.

Il prezzo di equilibrio si ottiene risolvendo l'equazione d = g:

$$37440 - 60p = -29760 + 80p \quad \rightarrow \quad 140p = 67200 \quad \rightarrow \quad \mathbf{p = 480}$$

In corrispondenza di $p = 480$, l'offerta risulta $g_1(480) = 8640$ unità.

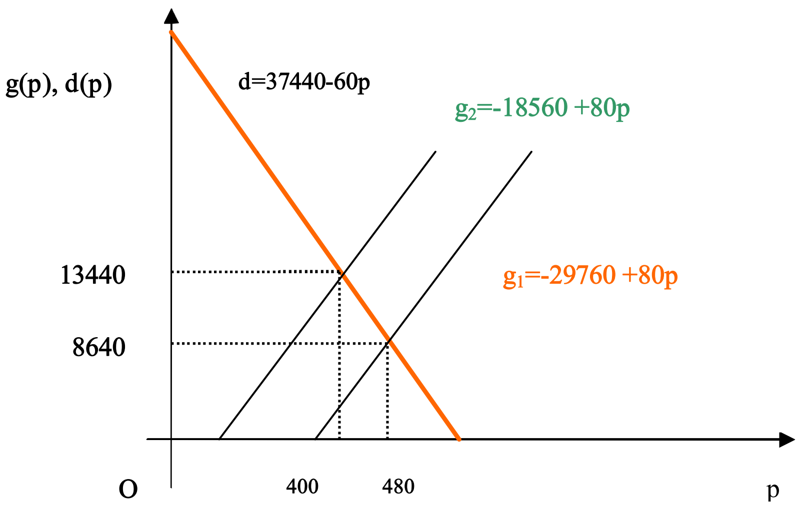
Se si lascia invariata la domanda e si modifica l'offerta, il nuovo prezzo di equilibrio risulta:

$$37440 - 60p = -18560 + 80p \quad \rightarrow \quad 140p = 56000 \quad \rightarrow \quad \mathbf{p = 400}$$

In corrispondenza di $p = 400$, l'offerta risulta $g_2(400) = 13440$ unità.
Pertanto si ha un aumento dell'offerta di:

$$g_2(480) - g_2(400) = 19840 - 13440 = \mathbf{6400} \text{ unità,}$$

a cui corrisponde una diminuzione di prezzo $\Delta p = 480 - 400 = \mathbf{80}$
In modo analogo, si potrebbe esaminare il prezzo di equilibrio, se resta invariata l'offerta e si modifica la domanda, o se variano entrambe le funzioni.



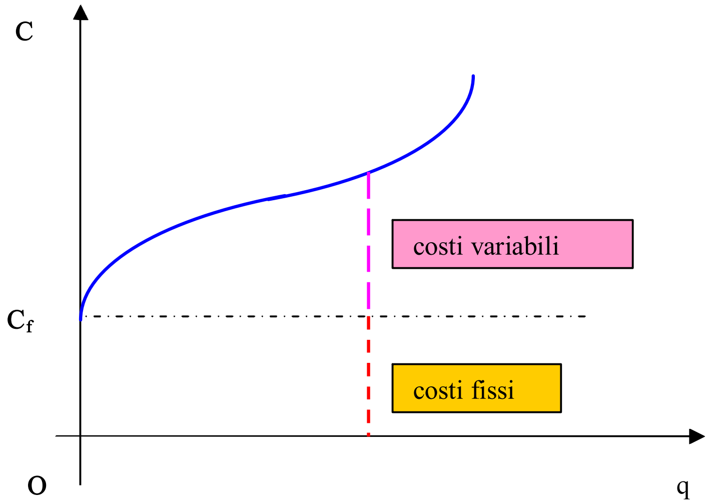
LA FUNZIONE COSTO

La produzione di un bene ha dei costi dovuti alle materie prime utilizzate, alla mano d'opera, ai magazzini, ai macchinari, etc. l'obiettivo dell'impresa è quello di raggiungere la massima produzione con i minimi costi.

1. i costi fissi sono quelli che non dipendono dalla quantità di bene prodotto (noleggio di un macchinario);
2. i costi variabili dipendono dalla quantità di bene prodotto acquisto delle materie prime);
3. i costi totali C sono funzione della quantità prodotta q e sono la somma di quelli fissi e di quelli variabili:

$$C = C_f + C_v \qquad \text{con} \quad 0 \le q \le Q$$

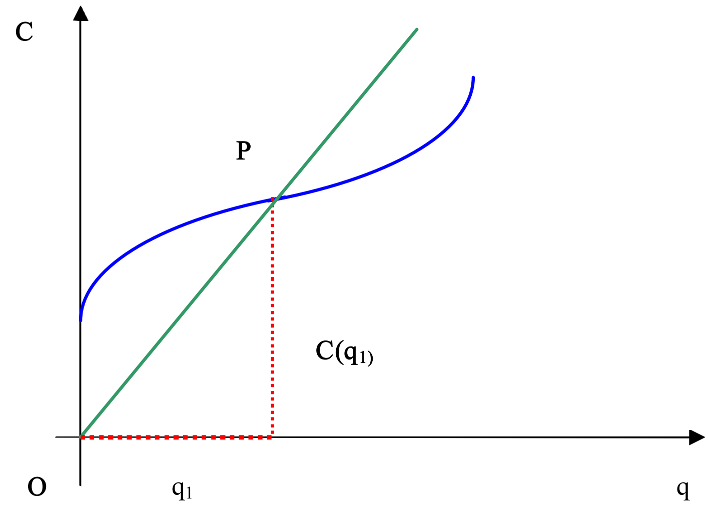
essendo Q la massima quantità di produzione del bene.



Si definisce **costo medio** (o **unitario**) C_m di un bene il rapporto tra il costo totale **C** e la quantità prodotta:

$$C_m = C/q$$

Considerato il grafico del costo totale, il costo medio relativo ad una certa quantità q corrisponde con il coefficiente angolare della retta che congiunge l'origine con il punto di ascissa q.

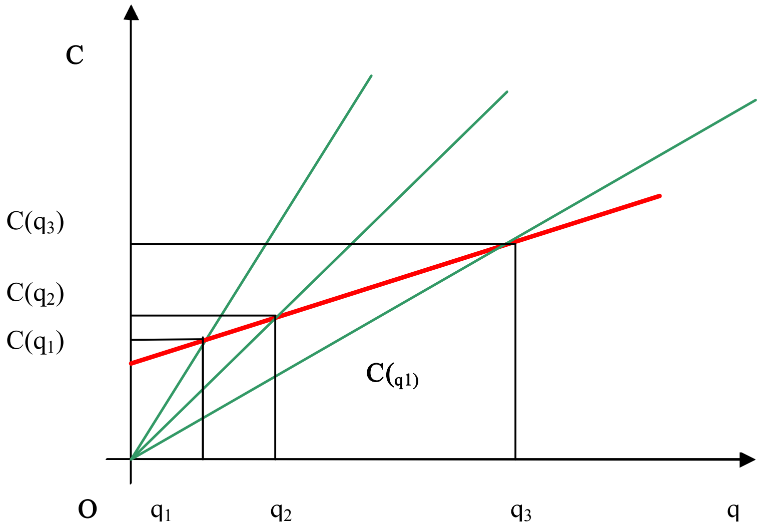


ESEMPIO

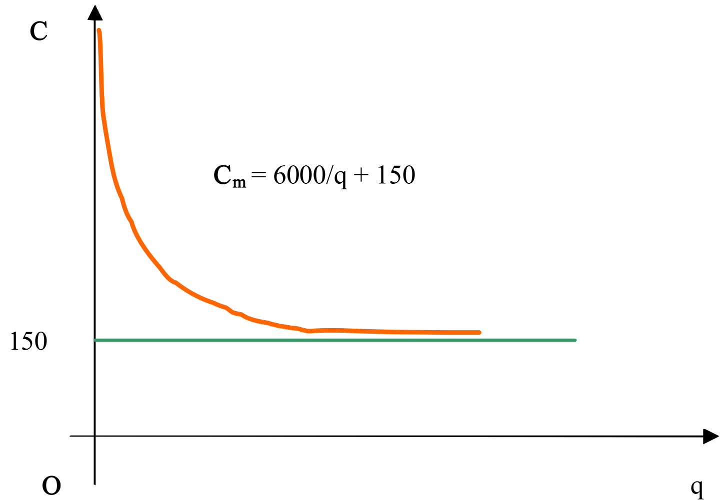
Un'impresa che produce forni a microonde, sostiene spese fisse mensili di euro seimila e spese di euro 150 per ogni forno prodotto. Studiamo come varia il costo medio al variare del numero di forni prodotti.

La funzione costo totale risulta: $C = 150\,q + 6000$

La funzione costo medio risulta: $C_m = (150\,q + 6000)/q = 150 + 6000/q$



L'inclinazione della retta che congiunge il punto O con un punto del grafico diminuisce all'aumentare di q.



La funzione costo medio è rappresentata da un'iperbole traslata con asintoto orizzontale $C_m = 150$.

Nel caso affrontato dal problema (funzione costo totale lineare) possiamo affermare che all'aumentare della produzione il costo medio dimuinisce.
Esistono modelli, però, per i quali il costo medio diminuisce per poi ritornare ad aumentare; in questi casi, è opportuno studiare il grafico della funzione costo medio per ottenere i punti di minimo cioè quei punti per i quali si riesce ad avere il costo unitario più basso.

Ad un imprenditore desideroso di poter modificare la propria produzione, sia in aumento sia in diminuzione, interessa sapere quanto la variazione possa incidere sui costi.

Per avere questa informazione è utile utilizzare il ***costo marginale.***

Costo marginale per unità (caso discreto).
Si definisce costo marginale C_{ma} **il costo che si deve sostenere per aumentare di una unità la produzione di un bene.**

$$C_{ma} = C(q+1) - C(q)$$

Costo marginale nel caso in cui la variabile sia continua.
Si definisce costo marginale C_{ma} **il rapporto tra l'aumento di costo che si deve sostenere per un aumento Δq della quantità prodotta e l'incremento Δq stesso.**

$$C_{ma} = [C(q + \Delta q) - C(q)] / \Delta q$$

Esiste una relazione importante tra costo marginale e costo medio.
Se si considera la derivata prima della funzione costo medio:

$$D[C(q)/q] = [C'(q)\, q - C(q)] / q^2 = (C_{ma} - C_m) / q$$

Pertanto:

- la derivata prima si annulla quando $C_{ma} = C_m$;
- la derivata prima è positiva quando $C_{ma} > C_m$;
- la derivata prima è positiva quando $C_{ma} < C_m$;

ESEMPIO

Una ditta produce dischi fissi per PC sostenendo spese fisse di € 1500, spese variabili di € 100 per ogni unità prodotta a cui va aggiunta una spesa pari al 5% del quadrato delle unità prodotte. Determinare il costo marginale.

Indicando con q il numero di unità prodotte (caso discreto perché si possono produrre solo quantità intere), risulta:

il costo totale: $C(q) = 0{,}05\, q^2 + 100\, q + 1500$

il costo marginale: $C_{ma}(q) = C(q+1) - C(q) = 0{,}05(q+1)^2 + 100(q+1) + 1500 + - (0{,}05\, q^2 + 100\, q + 1500) = 0{,}1\, q + 100{,}05$.
Si osservi che in questo caso, l'aumento non dipende dai costi fissi.

LA FUNZIONE RICAVO

Il **ricavo totale R(q)** è dato dal prodotto della quantità venduta per il prezzo unitario di vendita.

Il **ricavo medio** è dato dal rapporto tra il ricavo totale e la quantità venduta:

$$R_m = R(q) / q$$

Distinguiamo due casi:

In un **mercato di concorrenza perfetta il ricavo** è funzione soltanto della quantità q venduta, mentre il prezzo è costrante:

$$R(q) = p.q \;\rightarrow\; R_m = p \qquad \text{e} \qquad R_{ma} = p$$

Il ricavo marginale e il ricavo medio sono uguale al prezzo unitario.

In un **mercato monopolistico** il prezzo è funzione di q, quindi:

$$R(q) = p(q).q \;\rightarrow\; R_m = p(q)$$

LA FUNZIONE UTILE NETTO

Il **profitto o utile netto U(q)** è la differenza tra il ricavo totale e il costo totale:

$$U(q) = R(q) - C(q)$$

L'obiettivo dell'impresa è quello di raggiungere il massimo risultato economico dalla propria produzione. Ciò equivale alla ricerca del massimo della funzione U(q)

ESEMPIO

Il ricavo totale e il costo totale relativi alla produzione e vendita di un bene, in un mercato di concorrenza perfetta, sono espressi dalle seguenti funzioni:
$R(q) = 800\ q$, $C(q) = 0{,}8\ q^2 + 212\ q + 14200$
Determinare per quale quantità q di bene si ha il massimo guadagno e quali sono i limiti di produzione per non essere in perdita.

$U(q) = R(q) – C(q) = 800\ q – (0{,}8\ q^2 + 212\ q + 14200) = -\ 0{,}8\ q^2 + 588\ q - 14200$

La funzione profitto, nel caso in questione, è rappresentata da una parabola con concavità verso il basso di vertice V(367,5;93845); il massimo guadagno, quindi, è 93845 in corrispondenza di una vendita di 367,5.

Per non essere in perdita, i limiti di produzione si ottengono:
$U(q) \geq 0 \quad \rightarrow \quad -\ 0{,}8\ q^2 + 588\ q – 14200 \quad \rightarrow \quad \mathbf{25 \leq q \leq 710}$