

La ricerca operativa può essere considerata:

*“L'applicazione del metodo scientifico da parte di gruppi interdisciplinari a problemi che implicano il controllo di sistemi organizzati al fine di fornire soluzioni ottimali”.*

Il questa definizione si tende a sottolineare che la Ricerca Operativa è una disciplina che tratta dello sviluppo e dell'applicazione di metodi scientifici per la soluzione di problemi di decisione (ovvero ha come oggetto lo studio e la messa a punto di metodologie per la soluzione di problemi decisionali). Si tratta di scegliere quali decisioni prendere per gestire nel modo più efficiente un sistema reale utilizzando strumenti matematici; quindi i problemi affrontati nell'ambito della Ricerca Operativa sono tipicamente quelli in cui bisogna prendere decisioni sull'uso di risorse disponibili in quantità limitata in modo da rispettare un insieme assegnato di vincoli, massimizzando il “beneficio” ottenibile dall'uso delle risorse stesse.

### LE FASI DELLA R.O.

A. la formulazione del problema.

significa determinare con precisione gli obiettivi che si intendono raggiungere, le variabili da prendere in esame, i vincoli che li limitano.

B. la raccolta dei dati.

in questa fase si individua l'insieme dei valori che le variabili possono assumere e le relazioni tra esse.

i dati disomogenei devono essere esaminati ed elaborati in modo da individuare le variabili del problema e i valori che esse possono assumere.

C. la costruzione del modello matematico.

in questa fase si costruisce il modello matematico che rappresenta il problema.

nella sua forma più semplice, il modello e' costituito da:

1. una funzione univoca detta funzione obiettivo:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

dove  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sono le variabili dette d'azione o ammissibili

(l'insieme dei valori che possono essere assunti dalle variabili viene detto

regione o area ammissibile o campo di scelta);

2. relazioni tra le variabili detti vincoli tecnici;

3. vincoli di segno come :  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots$

D. la risoluzione del modello.

in questa fase si usano i metodi tradizionali della matematica, da quelli classici all'analisi numerica, tecniche di iterazione e tecniche di simulazione con elaboratore elettronico.

la **soluzione ottima** trovata e' un elemento della regione ammissibile che rende la funzione obiettivo massima o minima.

E. l'analisi e la valutazione nel contesto reale.

in questa fase si analizza **la validità** del modello e della soluzione trovata, tenendo conto del contesto reale al quale si riferisce.

di solito noi tratteremo solo gli aspetti matematici dei problemi, non affronteremo mai questa fase della R.O.

## LA CLASSIFICAZIONE DEI PROBLEMI DI SCELTA.

- I problemi di scelta si dicono discreti quando le variabili d'azione possono solo assumere valori interi, all'interno dei loro intervalli di variabilità;
- I problemi di scelta si dicono continui quando le variabili possono assumere tutti i valori possibili nel loro intervallo di variabilità.
- I problemi di scelta si dicono in condizione di certezza quando i dati sono sicuri e fissi, frutto di indagini precise e la loro conseguenza è verificata a priori.
- I problemi di scelta si dicono in condizione di incertezza quando i dati dipendono da eventi casuali che hanno una certa probabilità di verificarsi.
- I problemi di scelta si dicono in condizione di certezza e con effetti immediati quando il tempo intercorrente tra la decisione e la realizzazione non influisce sulle grandezze economiche in gioco.
- I problemi di scelta si dicono in condizione di certezza e con effetti differiti quando bisogna valutare il tempo intercorrente tra la decisione e la attuazione della scelta, come per esempio negli investimenti finanziari o industriali.

## PROBLEMI DI SCELTA IN CONDIZIONI DI CERTEZZA

### PROBLEMI DI SCELTA NEL CASO CONTINUO

#### 1°- IL GRAFICO DELLA FUNZIONE OBIETTIVO E' UNA RETTA

Si acquistano prodotti al costo di 0,7 euro/kg e vengono rivenduti a 1,2 euro/kg.

Si sostengono per il trasporto costi fissi giornalieri di 6 euro e al massimo si possono trasportare giornalmente 20 kg di prodotti.

Si richiede di calcolare la quantità di prodotti da vendere per avere il massimo utile.

$$R(x) = 1,2 x \quad (\text{ricavo giornaliero})$$

$$C(x) = 0,7 x + 6 \quad (\text{costo giornaliero})$$

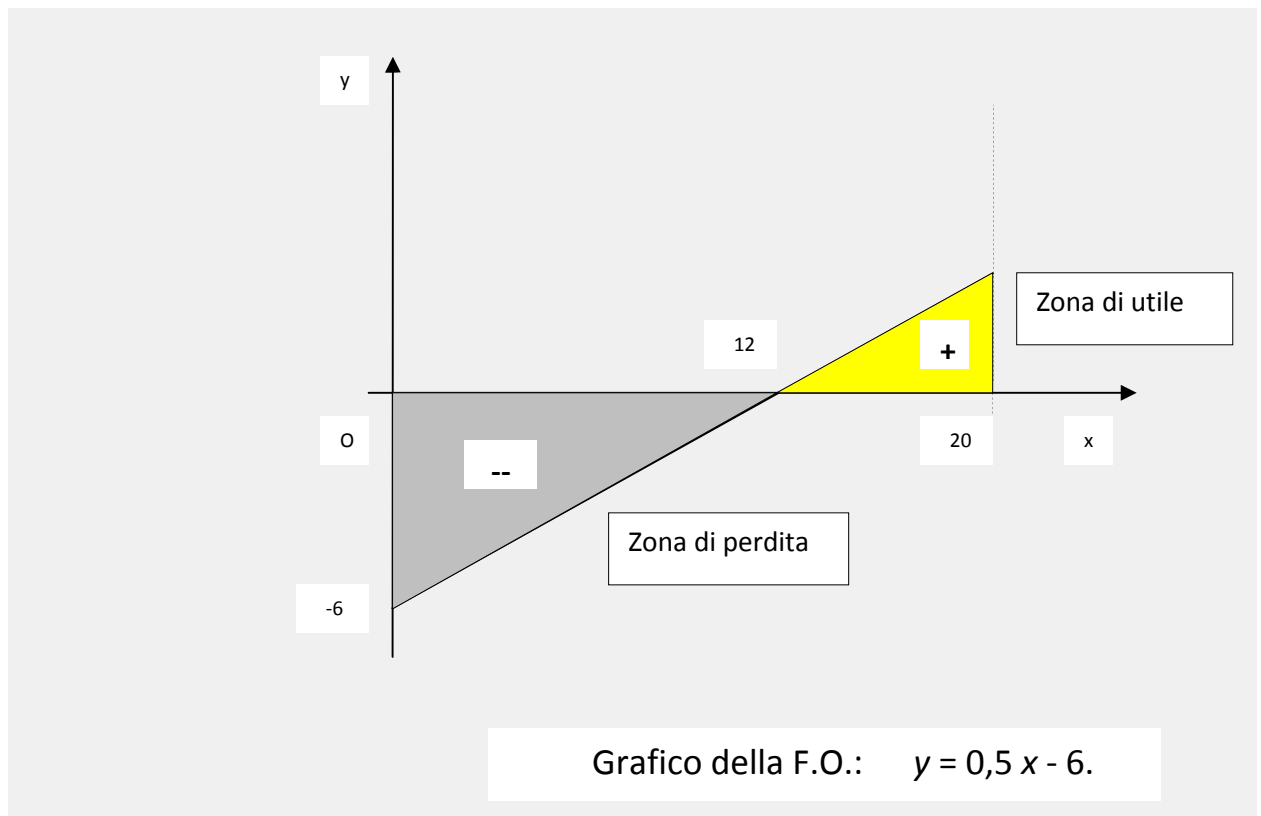
$$U(x) = R(x) - C(x) = 0,5 x - 6 \quad (\text{utile giornaliero})$$

Il modello matematico, pertanto, che ne risulta è:

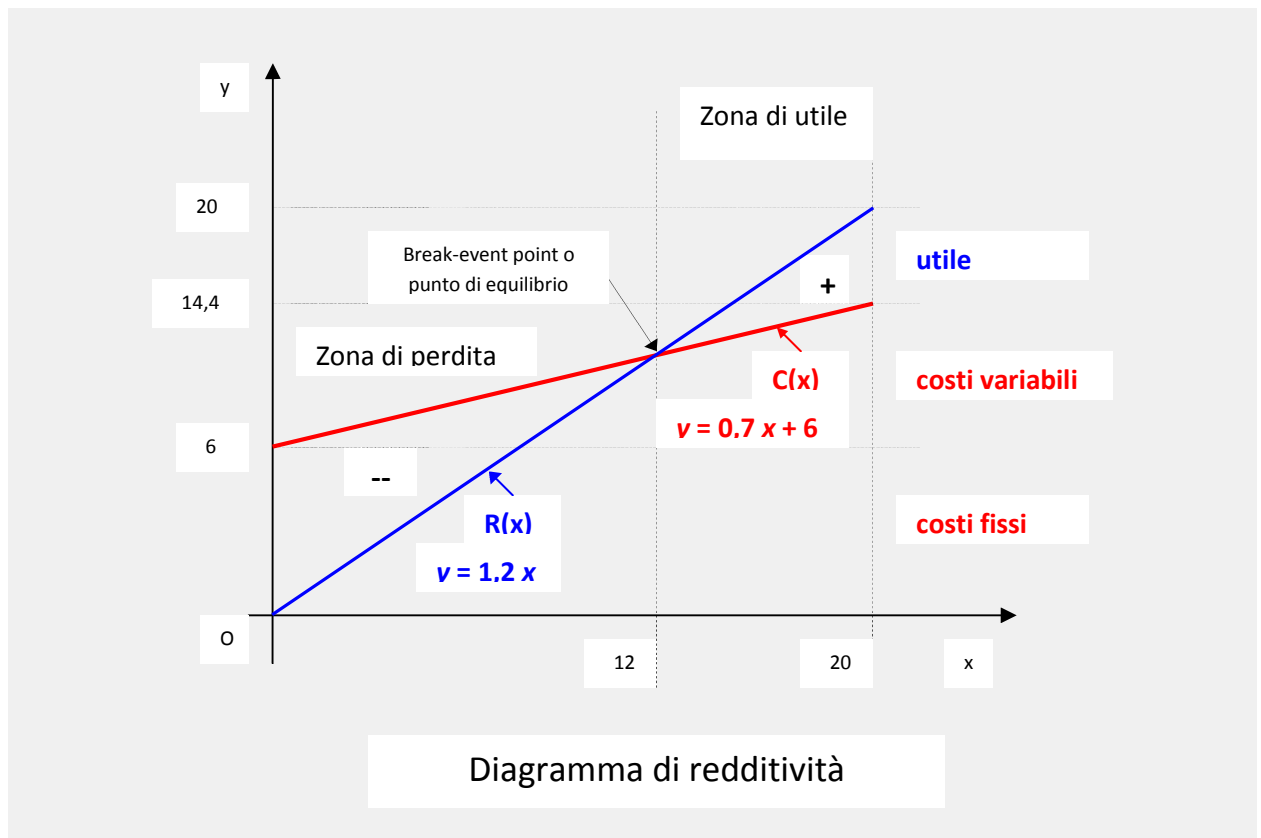
$$y = 0,5 x - 6 \quad (\text{funzione obiettivo})$$

$$\text{con } x \geq 0 \quad (\text{vincolo di segno})$$

$$x \leq 20 \quad (\text{vincolo tecnico})$$



Il problema può essere risolto anche in un altro modo costruendo il **diagramma di redditività**.



## 2°- IL GRAFICO DELLA FUNZIONE OBIETTIVO E' UNA PARABOLA

Una ditta produce detersivi per lavatrici. Sostiene una spesa fissa di settimanale di euro 100 ed un costo di euro 2 al litro. La ditta prevede di ricavare dalla vendita euro 3 al litro con una spesa di vendita di 0,001 euro per ogni litro venduto.

Determinare:

- a)-il numero di litri che devono essere venduti settimanalmente per avere il guadagno max nell'ipotesi che tutta la produzione venga venduta (senza limiti di produzione);
- b)-il numero di litri che devono essere venduti settimanalmente per avere il guadagno max nell'ipotesi che per confezionare il prodotto, la ditta faccia uso di due macchine delle quali la prima può confezionare settimanalmente 400 l e la seconda 600 l di prodotto.

a)- Se indichiamo con x il numero di litri venduti, si ha:

**costo di produzione settimanale:**  $C(x) = 2x + 100$

**spese di vendita:**  $S(x) = 0,001 x^2$

**ricavo settimanale:**  $R(x) = 3x$

**guadagno settimanale:**  $U(x) = R(x) - C(x) - S(x)$

Il modello matematico, pertanto, che ne risulta è:

$y = - 0,001 x^2 + x - 100$  (funzione obiettivo)

con:  $x \geq 0$  (vincolo di segno)  
(nessun vincolo tecnico)

b)- Se indichiamo con  $x$  il numero di litri venduti, si ha:

**costo di produzione settimanale:**  $C(x) = 2x + 100$

**spese di vendita:**  $S(x) = 0,001 x^2$

**ricavo settimanale:**  $R(x) = 3x$

**guadagno settimanale:**  $U(x) = R(x) - C(x) - S(x)$

Il modello matematico, pertanto, che ne risulta nella prima ipotesi:

$y = - 0,011 x^2 + x - 100$  (funzione obiettivo)

con:  $x \geq 0$  (vincolo di segno)

$x \leq 400$  (vincolo tecnico)

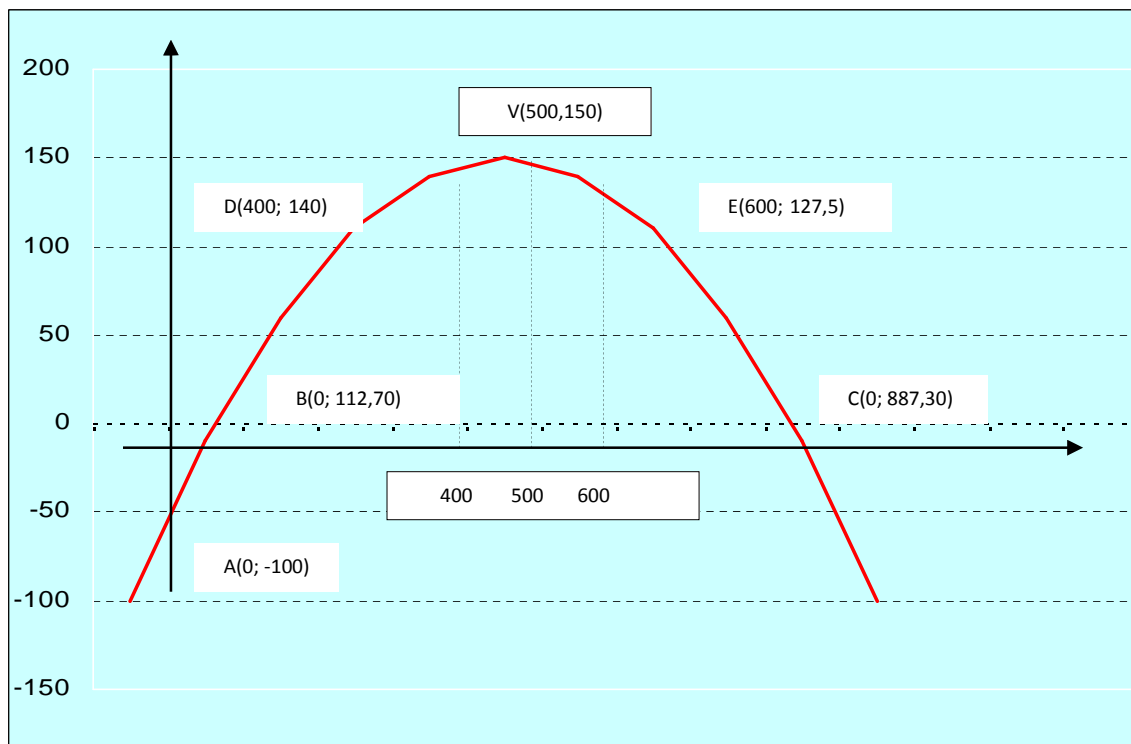
Il modello matematico, pertanto, che ne risulta nella seconda ipotesi:

$y = - 0,011 x^2 + x - 100$  (funzione obiettivo)

con:  $x \geq 0$  (vincolo di segno)

$x \leq 600$  (vincolo tecnico)

La rappresentazione della funzione obiettivo nei tre casi in considerazione è la parabola ricavata con Excel nella pagina seguente:



Dopo aver determinato le coordinate del vertice e dei punti d'intersezione con li assi:

$$V(500; 150), \quad A(0; -100), \quad B(0; 112,70), \quad C(0; 887,30)$$

Dal grafico risulta che per una produzione inferiore a 112,7 litri la ditta è in perdita, il punto A indica i costi fissa cioè quando le vendite non sono iniziate. Per 112,7 litri il guadagno è nullo e comincia a crescere fino a raggiungere il massimo per una produzione di 500 litri, poi decresce fino alla produzione di 887,3 e per tale valore diventa di nuovo nullo.

**Il massimo guadagno, nel primo caso si ha per una produzione e vendita di 500 litri e corrisponde all'ordinata del vertice, ossia 150 euro.**

Nel secondo caso prospettato dal problema e cioè con la presenza del vincolo tecnico  $x \leq 400$  l, la condizione di **massimo guadagno** si ha in corrispondenza della massima produzione consentita:  **$x = 400$  litri con un guadagno massimo di euro 140.**

Con la terza ipotesi  $x \leq 600$  l, **il massimo guadagno si ha in corrispondenza del vertice della parabola che rappresenta il caso esaminato senza vincoli tecnici.**

### 3°- IL GRAFICO DELLA FUNZIONE OBIETTIVO E' UN'IPERBOLE

Un rappresentante di commercio che fa uso della propria auto per il lavoro, sostiene spese fisse settimanali di euro 200, spese di euro 0,05 per chilometro e spese pari a  $0,001x^2$  di manutenzione dove con  $x$  indichiamo il numero di chilometri percorsi.

Determinare il numero di chilometri che il commerciante deve percorrere settimanalmente per avere la minima spesa per chilometro.

Indicato con  $x$  il numero di chilometri percorsi e con  $y$  la spesa totale, si ha:

1. spese fisse settimanali:  $S_1 = 200$
2. spese settimanali variabili:  $S_2(x) = 0,05x$
3. spese di manutenzione:  $S_3(x) = 0,001x^2$
4. spese totali settimanali:  $S(x) = S_1 + S_2(x) + S_3(x)$
5. spese settimanali per km:  $S(x)/x = [S_1 + S_2(x) + S_3(x)]/x$

il modello matematico risultante è il seguente:

$$y = (200 + 0,5x + 0,001x^2)/x \quad \text{min.} \quad \text{(funzione obiettivo)}$$

$$\text{con } x \geq 0 \quad \text{(vincolo di segno)}$$

$$\text{(nessun vincolo tecnico)}$$

La funzione  $y = (ax^2 + bx + c)/x = ax + b + c/x$  ( con  $a$  e  $b$  positivi) è l'equazione di un'iperbole.

Per trovare il minimo basta derivare la funzione:

$$y' = a - c/x^2 \rightarrow a - c/x^2 = 0 \rightarrow x_{\min} = \sqrt{\frac{c}{a}} \quad \text{e} \quad y_{\min} = 2\sqrt{ac} + b$$

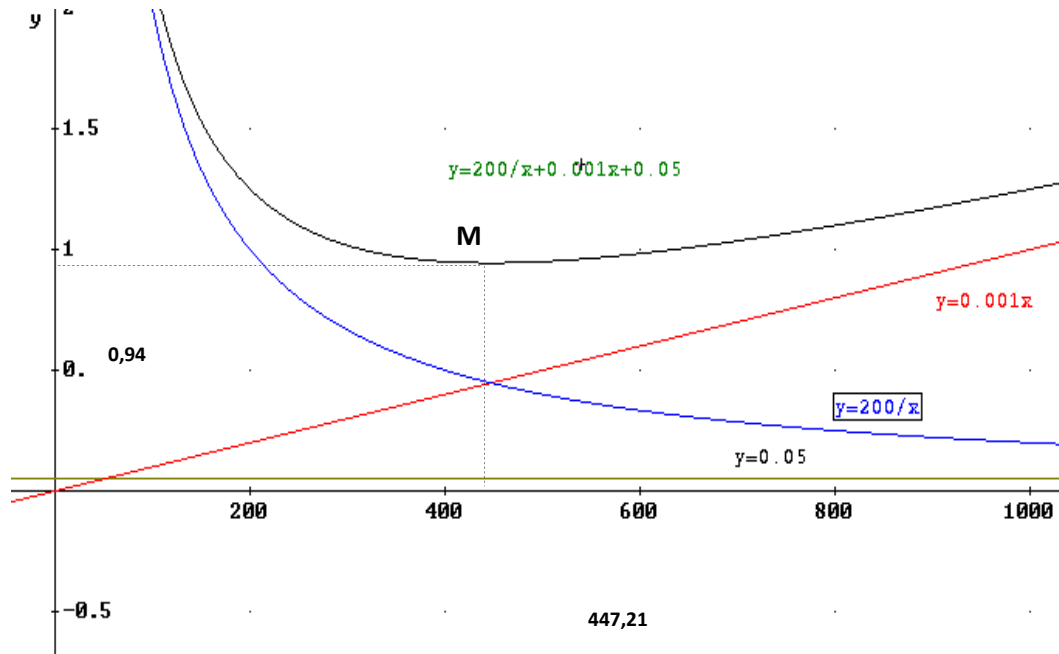
oppure trovare il punto di intersezione tra:

$$\begin{cases} y = \frac{c}{x} \\ y = ax \end{cases} \rightarrow ax = \frac{c}{x} \Rightarrow x^2 = \frac{c}{a} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{c}{a}} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{c}{a}}$$

Nel problema in esame risulta:

$$x_{\min} = \sqrt{\frac{200}{0,001}} = 447,21 \quad \text{e} \quad y_{\min} = 2\sqrt{200 \times 0,001} + 0,05 = 0,94$$

da cui  $M(447,21; 0,94)$ , cioè il commerciante deve percorrere settimanalmente km 447,21 con una spesa minima per chilometro pari a euro 0,94.



#### 4°- LA FUNZIONE OBIETTIVO E' ESPRESSA DA PIU' FUNZIONI

Un rivenditore di concimi sostiene una spesa fissa mensile di euro 800 più una spesa variabile per chilogrammo venduto espressa da  $0,32 + 0,000004 x$ , dove  $x$  indica il numero di kg venduti mensilmente.

La sua provvigione è di:

- euro 0,5 per ogni kg di concime venduto fino a 15000 kg venduti mensilmente;
- euro 0,6 per ogni kg di concime venduto oltre i 15000 kg e sino a 25000 kg venduti mensilmente;
- euro 0,7 per ogni kg di concime venduto oltre i 25000 kg.

Determinare:

- la quantità di concime da produrre mensilmente per non essere in perdita;
- il numero di kg che deve vendere per ottenere il guadagno massimo;
- l'entità del guadagno massimo.

Se indichiamo con  $x$  il numero di kg di concime venduti mensilmente, si ha:

- costo mensile  $C(x) = 800 + (0,32 + 0,000004 x) x$
- ricavo mensile:

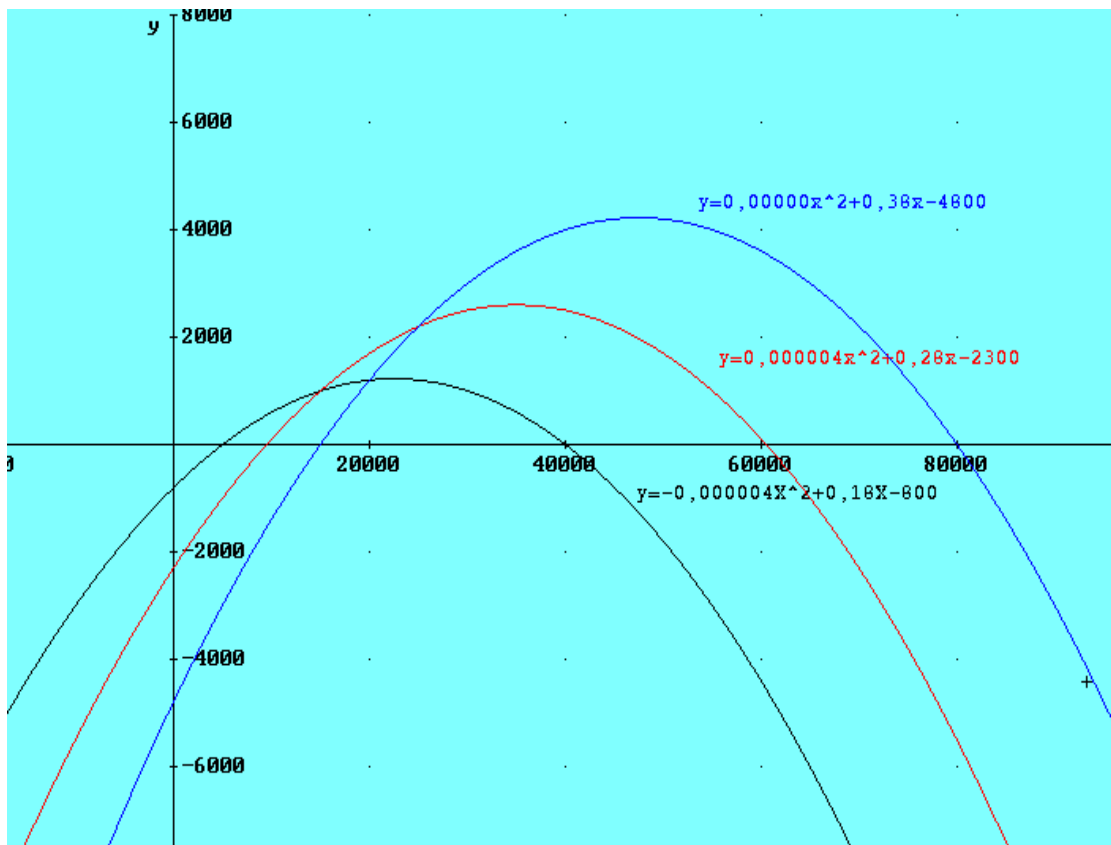
$R_1(x) = 0,5 x$	per $0 \leq x \leq 15000$
$R_2(x) = 0,6 x$	per $15000 < x \leq 25000$
$R_3(x) = 0,7 x$	per $x > 25000$

- guadagno mensile:

$U_1(x) = 0,5 x - C(x)$	per $0 \leq x \leq 15000$
$U_2(x) = 0,5 \cdot 15000 + 0,6(x - 15000) - C(x)$	per $15000 < x \leq 25000$
$U_3(x) = 0,5 \cdot 15000 + 0,6 \cdot 10000 + 0,7(x - 25000) - C(x)$	per $x > 25000$

- il modello matematico che ne consegue è:

$y_1 = -0,000004 x^2 + 0,18 x - 800$	per $0 \leq x \leq 15000$
$y_2 = -0,000004 x^2 + 0,28 x - 2300$	per $15000 < x \leq 25000$
$y_3 = -0,000004 x^2 + 0,38 x - 4800$	per $x > 25000$



I risultati che si ottengono sono rappresentati nella tabella seguente:

Funzione obiettivo	Massimo nell' intervallo	Prodotto venduto
$y_1 = -0,000004 x^2 + 0,18 x - 800$	$Y_{M1} = 1000$	Kg 15000
$Y_2 = -0,000004 x^2 + 0,28 x - 2300$	$Y_{M2} = 2200$	Kg 25000
<b><math>y_3 = -0,000004 x^2 + 0,38 x - 4800</math></b>	<b><math>Y_{M3} = 4225</math></b>	<b>Kg 47500</b>

Dalla rappresentazione grafica si vede che la quantità di merce da vendere, per non stare in perdita, deve essere uguale o superiore a 5000 kg.

Essendo, poi,  $y_{M3}$  il più alto in assoluto, si può concludere che il massimo guadagno per il rivenditore è di euro 4225 ottenuto da una vendita di 47500 kg di concime.

Gli esempi visti si riferiscono ai problemi di scelta nel caso continuo dove la variabile d'azione  $x$  poteva assumere qualsiasi valore reale positivo.

Non sempre questo è possibile. Infatti se la variabile d'azione rappresenta per esempio numero di auto prodotte, numero di scatole confezionate, si comprende subito che essa può assumere solo valori interi positivi.

In questo caso i problemi di scelta vengono detti **problemi di scelta nel caso discreto**.

## PROBLEMI DI SCELTA NEL CASO DISCRETO

Un'industria produce motozappe ciascuna delle quali costa euro 4600. Il ricavo della vendita è di euro 9200 per ogni mezzo, ma diminuisce di euro 500 per ogni mezzo se i prodotti sono più di uno.

Sapendo che la massima produzione giornaliera consentita dagli impianti è di 8 motozappe, si determini il numero di mezzi da produrre e vendere per avere il massimo guadagno.

Indicato con  $x$  il numero di motozappe prodotte, si ha:

$$C(x) = 4600 x$$

$$R(x) = [9200 - 500(x - 1)] x$$

$$G(x) = R(x) - C(x) = - 500 x^2 + 5100 x$$

pertanto, possiamo costruire la seguente tabella:

numero di mezzi $x$	Costo $C(x)$	Ricavo $R(x)$	Guadagno $G(x)$
1	4600	9200	4600
2	9200	17400	8200
3	13800	24600	10800
4	18400	30800	12400
5	23000	36000	13000
6	27600	40200	12600
7	32200	43400	11200
8	36800	45600	8800

Dall'esame della tabella risulta che il **guadagno massimo euro 13000** è ottenuto dall'industria con la produzione e vendita di **5 pezzi**.

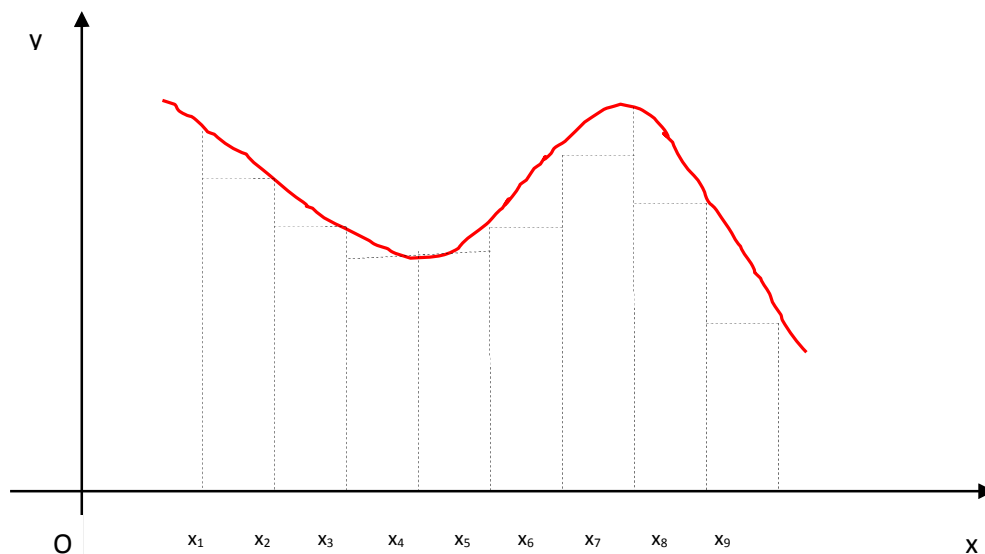
Per determinare il massimo o il minimo di particolari funzioni economiche quali il costo, il ricavo o il guadagno si può utilizzare **l'analisi marginale**.

Data una funzione  $y=f(x)$ , se consideriamo soltanto variazioni positive ed unitarie della  $x$ , alla corrispondente variazione della  $y$  si dà il nome di **incremento o decremento marginale**. Più precisamente:

- se la variazione della  $y$  (ossia  $f(x+1) - f(x)$ ), nel passare da  $x$  a  $x + 1$ , da negativa diventa per la prima volta positiva si ha **un minimo in  $x$** ;

- se la variazione della  $y$  (ossia  $f(x+1) - f(x)$ ), nel passare da  $x$  a  $x + 1$ , da positiva diventa per la prima volta negativa si ha **un massimo in  $x$** .

Nella figura è rappresentata una funzione dotata di massimo e di minimo relativo.



Dalla figura si può osservare che:

$$f(x_4) - f(x_3) < 0, \quad f(x_5) - f(x_4) > 0$$

quindi  $x_4$  è un punto di minimo relativo

analogamente:

$$f(x_7) - f(x_6) > 0, \quad f(x_8) - f(x_7) < 0$$

quindi  $x_7$  è un punto di massimo relativo

## ANALISI MARGINALE DI UNA FUNZIONE.

Riprendiamo il problema precedente e calcoliamo per ogni  $x$  da 1 a 7 le corrispondenti variazioni marginali.

$$G(x_i + 1) - G(x_i) \quad \text{con } i \text{ che varia da 1 a 7}$$

pertanto, possiamo costruire la seguente tabella:

numero di mezzi $x$	Costo $C(x)$	Ricavo $R(x)$	Guadagno $G(x)$	Guadagno marginale
1	4600	9200	4600	0
2	9200	17400	8200	3600
3	13800	24600	10800	2600
4	18400	30800	12400	1600
5	23000	36000	13000	600
6	27600	40200	12600	-400
7	32200	43400	11200	-1400
8	36800	45600	8800	-2400

Dall'esame della tabella risulta che alla industria conviene aumentare la produzione sino a quando il guadagno marginale da positivo diventa la prima volta negativo (da 600 a -400) cioè in corrispondenza di 5 mezzi giornalieri.

Allo stesso risultato si può pervenire per via algebrica:

$$G(x+1) - G(x) = -500(x+1)^2 + 5100(x+1) - (-500x^2 + 5100x) = -1000x + 4600$$

per sapere quando diventa negativo, dobbiamo risolvere la disequazione:

$$-1000x + 4600 < 0 \quad \text{ossia} \quad x > 4,6$$

**Pertanto il guadagno marginale diventa negativo per la prima volta dopo  $x = 4,6$  e trattandosi di un caso discreto, il primo valore intero è  $x = 5$ .**

## ANALISI MARGINALE DI DUE FUNZIONI

Riprendiamo il problema precedente e rifacciamo la tabella con i dati delle colonne del costo marginale e del ricavo marginale.

1	4600	9200	4600	4600	9200
2	9200	17400	8200	4600	8200
3	13800	24600	10800	4600	7200
4	18400	30800	12400	4600	6200
5	23000	36000	13000	4600	5200
6	27600	40200	12600	4600	4200
7	32200	43400	11200	4600	3200

Dall'esame della tabella risulta che alla industria conviene la produzione sino a quando il ricavo marginale resta superiore al costo marginale ( $5200 > 4600$ ) cioè sino a 5 mezzi giornalieri.

Osservazione. Nel problema esaminato, i dati erano tali da poter parlare di funzioni espresse da una legge analitica. Altre volte però i dati possono essere forniti direttamente da una tabella, possono essere disomogenei e non è detto che tra loro esista un legame di funzione. A tale proposito vediamo il seguente problema.

Un'azienda produce merce che viene venduta in confezioni da 50 pezzi ciascuna. Ogni giorno può produrre al massimo 8 confezioni. L'azienda sostiene costi fissi di euro 100 e costi di produzione di 1,5 euro per pezzo. Il ricavo proveniente dalla vendita di una confezione varia a seconda delle confezioni vendute secondo la tabella:

Numero confezioni	1	2	3	4	5	6	7	8
Ricavo per ogni confezione	150	145	145	130	120	120	110	105

Determiniamo quante confezioni l'azienda deve produrre per il massimo guadagno.

In questa situazione non è possibile rappresentare i dati forniti mediante una funzione, pertanto ci dobbiamo limitare a calcolare uno per uno costi, ricavi e guadagni a seconda delle confezioni vendute.

Numero confezioni	Costi fissi	Costi produzione	Costi totali	Ricavo	Guadagno marginale
1	100	75	175	150	-25
2	100	150	250	290	40
3	100	225	325	435	110
4	100	300	400	520	120
5	100	375	475	600	125
6	100	450	550	720	170
7	100	525	625	770	145
8	100	600	700	840	140

Dalla tabella ricaviamo che l'azienda è in perdita se produce una sola confezione, poi incomincia a guadagnare sempre più sino a un massimo di euro 170 producendo 6 confezioni, poi il guadagno decresce.

### IN GENERALE:

#### 1. Se i dati sono poco numerosi:

- Possiamo calcolare i valori assunti dalla funzione obiettivo in corrispondenza di ciascun valore  $x$ , riportarli in tabella e analizzare direttamente i risultati;

- Se riguardano una sola funzione, ad esempio il guadagno, possiamo valutare le variazioni marginali di questa funzione e cercare il massimo o il minimo quando per la prima volta le variazioni cambiano di segno;
- Se riguardano due funzioni (per esempio il ricavo e il costo), possiamo valutare le variazioni marginali di queste funzioni e quando per la prima volta le variazioni dell'una cessano di essere superiori a quelle corrispondenti dell'altra, abbiamo il massimo o il minimo cercato.

**2. Se i dati sono numerosi** il metodo precedente può diventare scomodo:

- Consideriamo la variabile  $x$ , quanto possibile, come una variabile reale e non intera;
- Determiniamo con i metodi dell'analisi per quale valore di  $x$  si ha il massimo o il minimo della funzione obiettivo;
- Se questo valore è intero, calcoliamo il corrispondente valore della funzione e il problema è risolto;
- Se questo valore non è intero, valutiamo la funzione per i due valori interi più vicini a quello trovato e poi decidiamo quale è il massimo o il minimo.

## LA SCELTA FRA PIÙ ALTERNATIVE

In molte occasioni un problema di decisione comporta la scelta fra due o più alternative possibili. Ad esempio, quando si deve far eseguire un lavoro, normalmente si richiedono preventivi a più ditte e poi si sceglie quello che ci sembra migliore; quando si deve scegliere quale macchina acquistare per fare una lavorazione, si valutano più possibilità e poi, in base a qualche criterio (produttività, costi, affidabilità) si fa la scelta; quando si deve scegliere un processo produttivo fra più possibili, si valuta quale ci dà la stessa produzione in minor tempo o con costi minori.

Per operare una scelta consapevole, dobbiamo anche in questo caso stabilire quale sia la funzione obiettivo che si vuole ottimizzare ed analizzare, al variare della variabile d'azione, quale sia la scelta più conveniente. In questi problemi, infatti, la scelta non è mai unica, ma dipende dal valore assunto dalla variabile. Per fare un esempio semplice, supponiamo di voler aprire un conto corrente e di chiedere più banche quale sia il tasso di interesse corrisposto; la prima cosa che ogni banca ci chiederà è quale somma desideriamo depositare, infatti, se l'importo della somma è basso, il tasso di interesse sarà quello corrente ed in genere, pur variando da banca a banca, non potrà essere molto elevato; per depositi di somme ingenti invece, il tasso di interesse potrebbe essere maggiore per attirare il cliente. Il tasso di interesse che ogni banca ci offrirà dipende dunque dalla somma che vogliamo depositare.

Vediamo dunque di trovare dei metodi che ci consentano di operare delle scelte anche in questi casi.

### **Esempio1: un problema di massimo**

Una banca pubblicizza tre forme di investimento di capitali. Nel primo caso (A) offre un rendimento netto del 6% all'anno diminuito di € 1000 per le spese sostenute dalla banca per la gestione del capitale; nel secondo caso (B) offre una rendita netta del 4% all'anno diminuita di € 200 a forfait; nel terzo caso (C) garantisce una rendita netta del 2,5% all'anno senza spese aggiuntive. Determina, al variare del capitale investito, la forma più conveniente fra quelle proposte, nell'arco di un anno.

Indichiamo con  $x$  il capitale da investire e, assumendo come unità di misura € 1000, calcoliamo gli interessi  $y$  che ciascuna delle tre forme ha prodotto

- investimento di tipo A:  $y = 0,06x - 1$  (retta a)
- Investimento di tipo B:  $y = 0,04x - 0,2$  (retta b)
- investimento di tipo C:  $y = 0,025x$  (retta c)

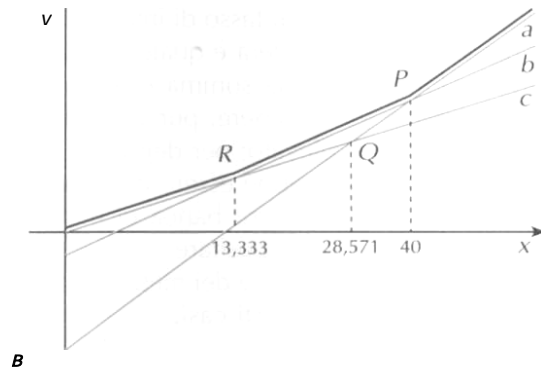
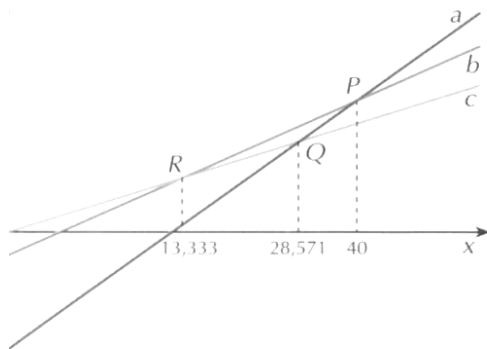
Le funzioni di rendimento ottenute sono lineari e rappresentano di rispettivamente le rette a, b, c della *figura*. Le ascisse dei punti di intersezione si trovano risolvendo i seguenti sistemi:

$$a \cap b \rightarrow \begin{cases} y = 0.06x - 1 \\ y = 0.04x - 0.2 \end{cases} \rightarrow \rightarrow \rightarrow x_p = 40$$

$$a \cap c \rightarrow \begin{cases} y = 0.06x - 1 \\ y = 0.25 \end{cases} \rightarrow \rightarrow \rightarrow x_q = 28.57$$

$$b \cap c \rightarrow \begin{cases} y = 0.04x - 0.2 \\ y = 0.025x \end{cases} \rightarrow \rightarrow \rightarrow x_r = 13.33$$

Il processo produttivo migliore è quello che, al variare di  $x$ , rende gli interessi più alti alla fine dell'anno, cioè quello che appartiene alla spezzata in alto della *figura b*.



Possiamo quindi dire che:

- se  $0 < x < 13,333$  la scelta migliore è l'investimento C
- se  $13,333 < x < 28,571$  la scelta migliore è l'investimento B
- se  $x > 28,571$  la scelta migliore è l'investimento A
- nel punto  $x = 13,333$  la scelta può cadere indifferentemente su B o su C;
- nel punto  $x = 28,571$  la scelta può cadere indifferentemente su A o su B.

Punti come **R** e **P** di questo esempio si dicono **punti di indifferenza**.

Un punto di indifferenza si trova quindi in corrispondenza di un valore di  $x$  per cui la scelta può cadere indifferentemente su una o su un'altra possibilità.

## Esempio 2: un problema di minimo

Un'azienda alimentare può inscatolare fino ad un massimo di 3q di mais ogni giorno in scatole da 500 g ciascuna. Per fare ciò può utilizzare tre cicli diversi che hanno gli stessi costi per unità di tempo e dei quali si sa che:

- il ciclo A impiega 10 secondi per preparare una scatola e ha tempi di preparazione iniziali di 1 ora;
- il ciclo B impiega 15 secondi per ogni scatola e la sua preparazione iniziale è di 30 minuti;
- il ciclo C impiega 20 secondi per ogni scatola ma ha tempi di preparazione di soli 15 minuti.

Quale ciclo conviene usare per avere il massimo rendimento?

Analizziamo il problema. Con 3 q di mais a disposizione si possono produrre 600 scatole da 500g ciascuna; il massimo rendimento, visto che i tre cicli hanno lo stesso costo, si ha utilizzando il ciclo produttivo che richiede meno tempo.

La variabile d'azione è quindi il numero  $x$  di scatole che si possono riempire e la funzione obiettivo è quella che esprime il tempo  $y$  di utilizzo di ciascun ciclo. Assumendo come unità di misura del tempo il minuto, si ha così che:

per il ciclo A:  $y = \frac{1}{6}x + 60$  ----- per il ciclo B:  $y = \frac{1}{4}x + 30$  ----- per il ciclo C:  $y = \frac{1}{3}x + 15$

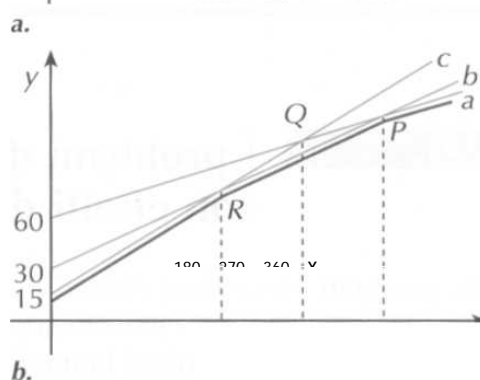
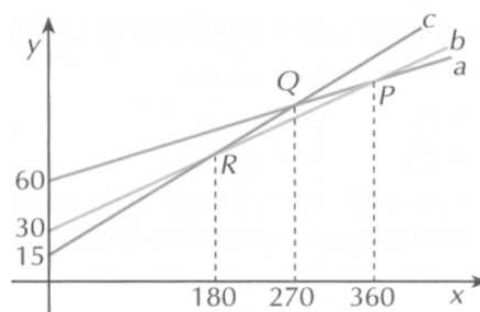
Ogni funzione ha poi come vincolo il sistema:  $\begin{cases} 0 \leq x < 600 \\ x \in \mathbb{N} \end{cases}$

Determiniamo i punti di indifferenza (figura a):

$$a \cap b \rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{6}x + 60 \\ y = \frac{1}{4}x + 30 \end{cases} \rightarrow \rightarrow \rightarrow P(360; 120)$$

$$a \cap c \rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{6}x + 60 \\ y = \frac{1}{3}x + 15 \end{cases} \rightarrow \rightarrow \rightarrow Q(270; 105)$$

$$a \cap c \rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{4}x + 30 \\ y = \frac{1}{3}x + 15 \end{cases} \rightarrow \rightarrow \rightarrow R(180; 75)$$



La scelta più conveniente per l'azienda è quella che comporta un minor tempo di utilizzo della macchina (e quindi un minor costo). Dall'analisi del grafico deduciamo che (figura b):

- se  $0 < x < 180$  i tempi minori sono quelli relativi alla retta c, corrispondente al ciclo C;
- se  $x = 180$  i tempi del ciclo C e del ciclo B sono uguali, quindi la scelta può cadere indifferentemente sull'uno o sull'altro;

- se  $180 < x < 360$  i tempi minori sono quelli relativi alla retta b, corrispondente al ciclo B;
- se  $x = 360$  i tempi dei cicli A e B sono uguali, quindi la scelta è indifferente;
- se  $360 < x < 600$  i tempi minori sono relativi alla retta a, quindi la scelta dovrà cadere sul ciclo A.

## IL PROBLEMA DELLE SCORTE

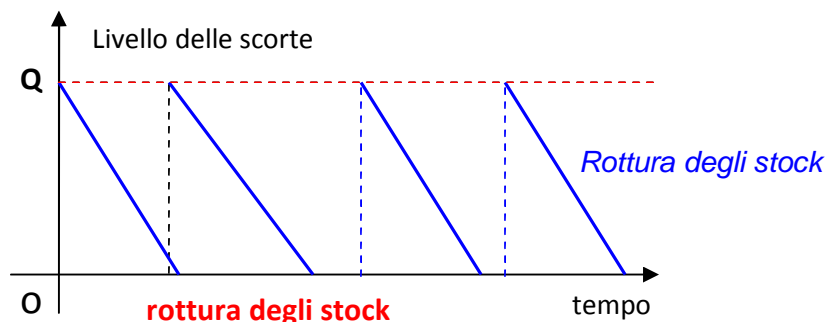
Il problema degli stock o delle scorte di magazzino è uno dei problemi tipici della Ricerca Operativa e riguarda i commercianti o tutti coloro che sono produttori di beni.

Infatti, se si vuole vendere un bene, bisogna che questo sia disponibile in quantità ottimale in magazzino. Però quest'ultimi costano, sia come tali, sia come gestione, per le tasse e per le persone che lavorano in essi, perché le merci che sono depositate possono deteriorarsi e debbono essere periodicamente movimentate.

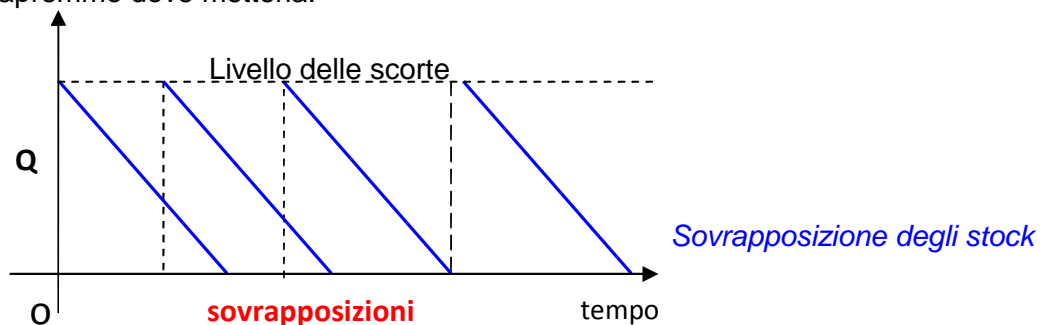
È molto complesso gestire nel tempo le scorte se, per esempio, i consumi non avvengono uniformemente nel tempo.



Al contrario non avere sufficiente merce in magazzino quando viene richiesta dal cliente, può arrecare un danno, sia per la perdita di guadagno, sia perché il cliente scontento può rivolgersi ad un altro fornitore.



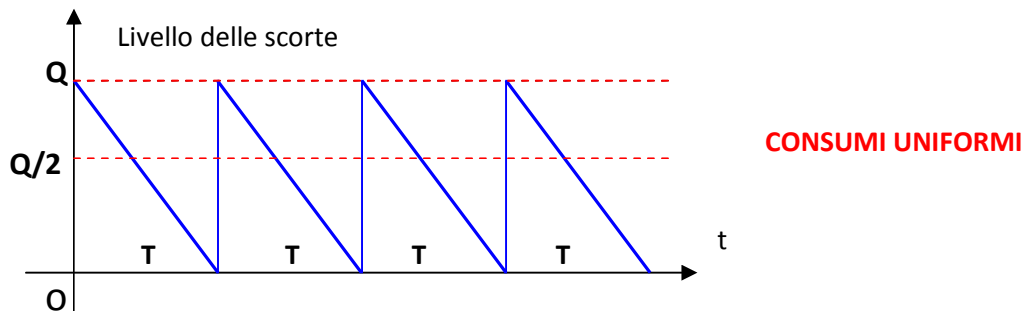
Si potrebbe pensare, per evitare ciò, di fare grossi ordinativi di merce ma questo farebbe lievitare i costi di gestione. Potremmo affrettare i rifornimenti, ma se la merce ordinata per il ripristino arrivasse prima, non sapremmo dove metterla.



Il problema è di grande complessità e, in una trattazione scolastica, è impossibile valutare i rischi in una simile gestione (ritardi nelle forniture, scioperi, incidenti, ecc.).  
 Ci limitiamo ad esaminare un modello di gestione semplificato con lo scopo di fornire una risoluzione del problema, bensì una base di partenza per studi più dettagliati.

Il modello semplificato presuppone che:

- Le scorte si esauriscano in maniera uniforme;
- Al termine di una scorta arrivino i rifornimenti senza creare rotture o sovrapposizioni;
- I tempi di rifornimento siano nulli.



In queste situazioni, si può ritenere di avere costantemente nel magazzino per tutto il tempo, una giacenza media pari a  $(Q + 0)/2 = Q/2$

Con queste ipotesi semplificate, si può ritenere il costo complessivo di gestione di un magazzino costituito dalla somma di:

- un costo complessivo di ordinazioni  $C_i$  indipendente dalla quantità di merce ordinata, dipendente solo dal personale utilizzato per ordinare la merce, dai costi degli uffici, dalle macchine che in essi funzionano, dalla loro manutenzione e dai rapporti con i clienti.
- un costo complessivo di magazzinaggio  $C_m$  dipendente dalle spese di movimentazione interna (carrelli, muletti, gru), dalle spese di conservazione (frigoriferi) dalle spese di gestione del magazzino quali quelle del personale e degli impianti.
- un costo complessivo di acquisto  $C_a$  per il quale si possono verificare due situazioni:
  - la prima si ha quando il costo è costante e indipendente dalla quantità ordinata;
  - la seconda si ha quando il costo dipende da sconti quantità.

Cerchiamo di formalizzare il problema con un esempio.

**Problema.** La ditta Divella prevede di vendere in un anno 20000 quintali di pomodori in barattoli da 1000 grammi ciascuno. Per la distribuzione dei barattoli sostiene euro 50 per ogni ordinazione, indipendentemente dalla quantità ordinata. La spesa annua per la giacenza in magazzino di un barattolo è di euro 0,08.

Determiniamo il numero di barattoli da ordinare ogni volta in modo che il costo di gestione risulti minimo.

Indicato con x il numero di barattoli da ordinare ogni volta:

$$n = (20000 \cdot 100) / x \quad \text{numero di ordinazioni in un anno}$$

$$C_o = 50 \cdot n \quad \text{costo delle ordinazioni in un anno}$$

ipotizzando una giacenza media di barattoli nel magazzino pari a  $x/2$ , risulta

$$C_m = 0,08 \cdot x/2 \quad \text{costo di magazzinaggio}$$

Pertanto il costo totale di gestione risulta:

$$C = C_o + C_m = \frac{2000000}{x} \cdot 50 + 0,08 \frac{x}{2} = \frac{100000000}{x} + 0,04x \quad \text{con } x \geq 0$$

Funzione del tipo:  $y = \frac{a}{x} + bx$ , già esaminata in altri casi, per la quale risulta:

$$x_m = \sqrt{\frac{100000000}{0,04}} = 50.000 \text{ (barattoli)}, \quad \text{min di } C = 2\sqrt{100000000 \times 0,04} = 4.000 \text{ euro}$$

Con:

$$n = \frac{2000000}{50000} = 40 \quad \text{ordinazioni da effettuare in un anno}$$

$$T = \frac{360}{n} = \frac{360}{40} = 9 \quad \text{tempo intercorrente tra due ordinazioni successive}$$

$$\frac{x}{2} = 25.000 \quad \text{barattoli come giacenza media in magazzino}$$

### FORMALIZZAZIONE DEL PROBLEMA.

Indicando con:

- M la merce che necessita ogni anno,
- Q la quantità di merce da ordinare ogni volta,
- T il periodo di tempo intercorrente tra due ordinazioni,
- n il numero delle ordinazioni da effettuare ogni anno,
- C il costo totale di gestione,
- $c_0$  il costo di una ordinazione,
- $C_o$  il costo totale delle ordinazioni,
- $c_m$  il costo unitario di magazzinaggio,
- $C_a$  il costo di acquisto della merce,
- p il costo per ogni unità acquistata,

risulta:

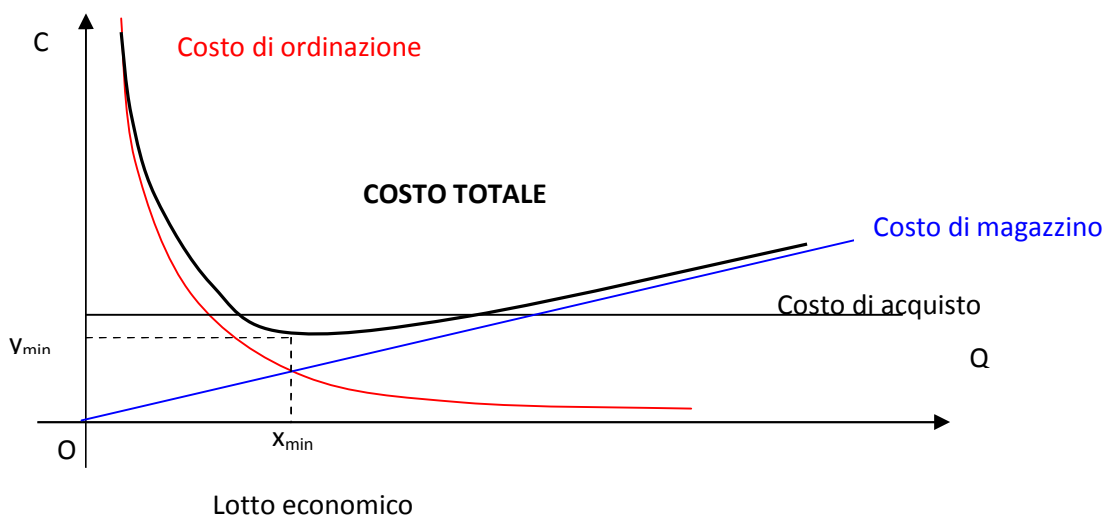
$$C = C_i + C_m + C_a$$

e poiché:

$$C_i = c_0 n, \quad n = M/Q, \quad C_i = c_0 M/Q, \quad C_m = c_m Q/2, \quad C_a = M p$$

$$C = C_i + C_m + C_a = c_0 M/Q + c_m Q/2 + M p$$

Dove l'unica variabile è Q dato che gli altri valori sono dei coefficienti noti, pertanto la funzione obiettivo è del tipo  $y = ax + b/x + c$  che ha un minimo nel punto di coordinate:



Per il nostro problema ne consegue:

$$Q = x_{\min} = \sqrt{\frac{c_0 M}{\frac{c_m}{2}}} = \sqrt{\frac{2c_0 M}{c_m}} \quad \text{quantità da ordinare ogni volta (lotto economico)}$$

$$C = y_{\min} = 2\sqrt{c_0 M \frac{c_m}{2}} + Mp = \sqrt{2c_0 M c_m} + Mp \quad \text{costo totale di gestione}$$

$$T = \sqrt{\frac{2c_0}{M c_m}} \quad \text{tempo intercorrente tra due ordinazioni}$$

$$n = \frac{M}{Q} = \sqrt{\frac{M c_m}{2c_0}} \quad \text{numero di ordinazioni in un anno}$$

### IL PROBLEMA DELLE SCORTE DI MAGAZZINO CON SCONTI QUANTITÀ

Un'industria di automobili necessita di 80000 motori in un anno e li ordina al costo di euro 72 per ogni ordinazione. I costi di magazzinaggio sono di euro 0,18 a motore. All'industria, i motori costano 3 euro ciascuno per ordini non superiori a 6000 pezzi, euro 2,9 per ordini maggiori a 6000 ma minori a 11000 pezzi, per ordini uguali o superiori a 11000 euro 2,8.

Determinare il numero di pezzi da ordinare ogni volta per sostenere il minimo costo di gestione del magazzino.

La funzione obiettivo è del tipo:  $y = C_0 \frac{M}{x} + c_m \frac{x}{2} + Mp$

dove:

$$c_0 = 72;$$

$$M = 80.000;$$

$$c_m = 0,18;$$

$$p = 3, p = 2,9 \text{ o } p = 2,8$$

a seconda dei quantitativi ordinati

la funzione obiettivo è perciò,

- per  $0 \leq x \leq 6.000$   $\rightarrow y = 72 \frac{80000}{x} + 0,18 \frac{x}{2} + 80000 \times 3$
- per  $6.000 < x < 11.000$   $\rightarrow y = 72 \frac{80000}{x} + 0,18 \frac{x}{2} + 80000 \times 2,9$
- per  $x \geq 11.000$   $\rightarrow y = 72 \frac{80000}{x} + 0,18 \frac{x}{2} + 80000 \times 2,8$

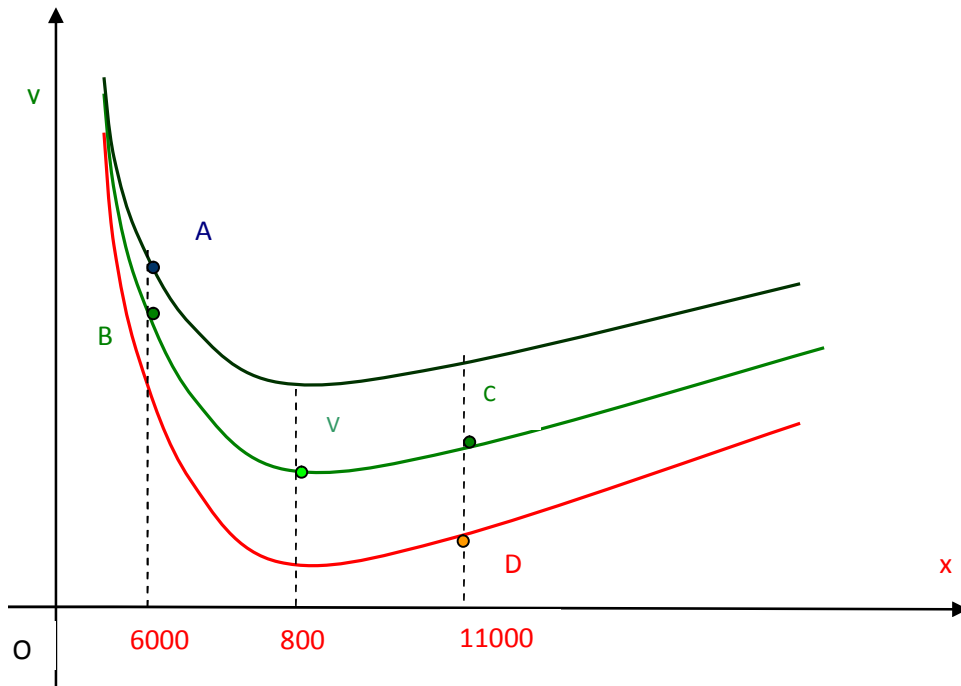
La rappresentazione grafica delle tre funzioni è piuttosto complessa, visti i coefficienti, tuttavia si

possono fare alcune considerazioni dato che si tratta di iperboli del tipo:  $y = \frac{b}{x} + ax + c$ , che dif-

feriscono solamente per il termine noto. Tutte hanno lo stesso valore di ascissa per il punto di minimo:

$$X_{\min} = \sqrt{\frac{2c_0M}{c_m}} = \sqrt{\frac{2 \times 72 \times 80000}{0,18}} = 8000$$

hanno grafici uguali traslati più o meno verso l'alto a seconda del termine noto ed in prima approssimazione possono essere rappresentate graficamente come nella figura sottostante:



Per rispondere al problema, bisogna calcolare le coordinate dei punti A,B,V,C,D.

$$y_{(A)} = 72 \frac{80000}{6000} + 0,18 \frac{6000}{2} + 3 \times 80000 = 241.500$$

$$y_{(B)} = 72 \frac{80000}{6000} + 0,18 \frac{6000}{2} + 2,9 \times 80000 = 233.500$$

$$y_{(C)} = 72 \frac{80000}{11000} + 0,18 \frac{11000}{2} + 2,9 \times 80000 = 233.513,64$$

$$y_{(V)} = \sqrt{2c_0Mc_m} + Mp = \sqrt{2 \times 72 \times 80000 \times 0,18} + 2,9 \times 80000 = 233.440$$

$$y_{(D)} = 72 \frac{80000}{11000} + 0,18 \frac{11000}{2} + 2,8 \times 80000 = 225.513,64$$

N. B. Il punto A appartiene alla prima funzione.

I punti B, V, C appartengono alla seconda funzione.

Il punto D appartiene alla terza funzione.

Dal confronto dei valori ottenuti si deduce che l'ordine più conveniente è di 11.000 motori per un costo complessivo di euro 225.513,64.