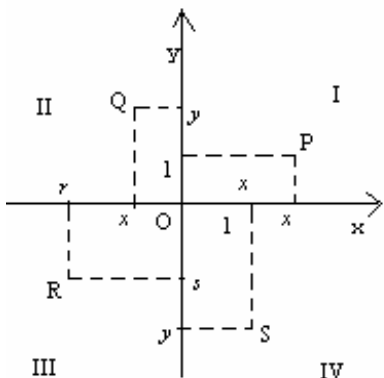


Ad ogni punto P del piano viene associato uno ed un solo elemento di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, cioè una coppia ordinata di numeri reali che sono, rispettivamente, le ascisse delle proiezioni ortogonali del punto P sull'asse x e sull'asse y . Ad esempio, al punto Q viene associata la coppia ordinata



$\langle x_Q, y_Q \rangle$ (vedi fig. 1), con $x_Q < 0$ e $y_Q > 0$.

La corrispondenza così stabilita è biunivoca, cioè invertibile: ad ogni coppia ordinata $\langle r, s \rangle$ di numeri reali è associato l'unico punto R del piano che è intersezione della perpendicolare all'asse x per il punto r con la perpendicolare all'asse y per il punto s .

Si scrive $Q \equiv \langle x_Q, y_Q \rangle$, $R \equiv \langle r, s \rangle$.

I due numeri reali che caratterizzano un punto si chiamano *le coordinate cartesiane* del punto stesso; la prima coordinata è detta ancora *ascissa*, mentre la seconda prende il nome di *ordinata*.

Di conseguenza, la retta x è detta anche *asse delle ascisse* e la retta y *asse delle ordinate*.

I punti dell'asse x sono caratterizzati dall'avere ordinata nulla: $X \equiv \langle x, 0 \rangle$;

i punti dell'asse y sono caratterizzati dall'avere ascissa nulla: $Y \equiv \langle 0, y \rangle$;

l'origine O del sistema, quindi, è $O \equiv \langle 0, 0 \rangle$.

- **Distanza tra due punti**

Dati due punti $P_1 \equiv \langle x_1, y_1 \rangle$ e $P_2 \equiv \langle x_2, y_2 \rangle$ in un riferimento cartesiano Oxy , la loro distanza $d(P_1, P_2)$ è la lunghezza del segmento di estremi P_1 e P_2 , ipotenusa del triangolo rettangolo

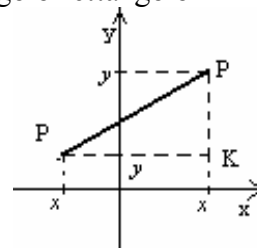
$\triangle QKP$.

Per il teorema di Pitagora

$$d(P_1, P_2) = l(\overline{P_1P_2}) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Il *punto medio* M del segmento $\overline{P_1P_2}$ è

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$



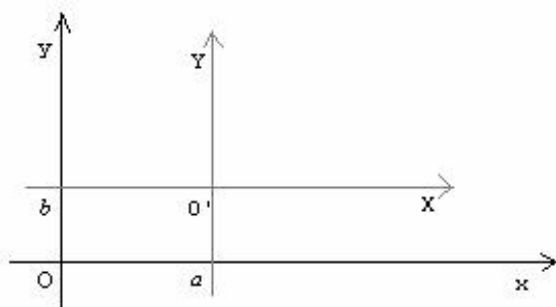
- Equazioni di una **traslazione** del sistema di riferimento:

$$\begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases} \quad \text{dove } a, b \in \mathbb{R},$$

x e y sono le coordinate di un punto P nel sistema di riferimento Oxy ;

X e Y sono le coordinate di P nel nuovo sistema di riferimento $O'XY$ in cui gli assi sono rispettivamente paralleli ed equiversi ai precedenti;

a e b sono le coordinate del punto O' nel sistema di riferimento Oxy .



• **Retta:**

equazioni

$$y = mx + q \quad (2) \quad m, q \in \mathbb{R}$$

$$ax + by + c = 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \neq 0 \vee b \neq 0$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \quad (1)(2)$$

(1) retta congiungente i punti $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ con $x_1 \neq x_2$.

(2) al variare di m e q e di P_1 e P_2 , rispettivamente, le due equazioni rappresentano tutte le rette del piano tranne le parallele all'asse y le cui equazioni sono $x = h, h \in \mathbb{R}$.

coefficiente angolare o pendenza:

$$m = -\frac{a}{b} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg} \alpha$$

dove α è l'angolo che la retta forma con il semiasse positivo delle ascisse.

Siano r di equazione $ax + by + c = 0$ (oppure $y = mx + q$)

s di equazione $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ (oppure $y = m_1x + q_1$), allora

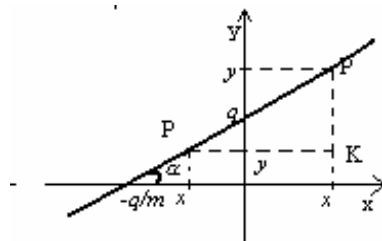
r coincide con s se e solo se $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$ (oppure $m = m_1 \wedge q = q_1$)

r è parallela ad s se e solo se $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} \wedge \frac{a}{a_1} \neq \frac{c}{c_1}$ (oppure $m = m_1$)

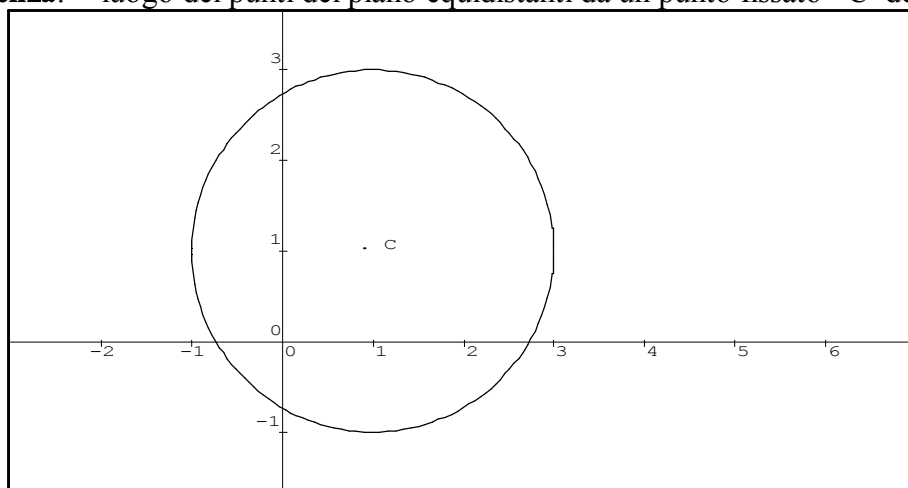
r è perpendicolare ad s se e solo se $\frac{a}{a_1} = -\frac{b}{b_1}$ (oppure $m_1 = -\frac{1}{m}$).

Equazione di un semipiano che ha per origine la retta di equazione $ax + by + c = 0$:

$$ax + by + c \geq 0 \quad \text{oppure} \quad ax + by + c \leq 0$$



• **Circonferenza:** luogo dei punti del piano equidistanti da un punto fissato C detto "centro".



Se $C \equiv \langle \alpha, \beta \rangle$ è il centro e r è la distanza (raggio),

equazioni:
$$\begin{cases} (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2 \\ x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \end{cases}$$

dove $\alpha = -\frac{a}{2}$, $\beta = -\frac{b}{2}$, $r = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ e $\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c > 0$.

- **Parabola:** luogo dei punti del piano equidistanti da una retta fissata (direttrice) e da un punto fissato (fuoco).

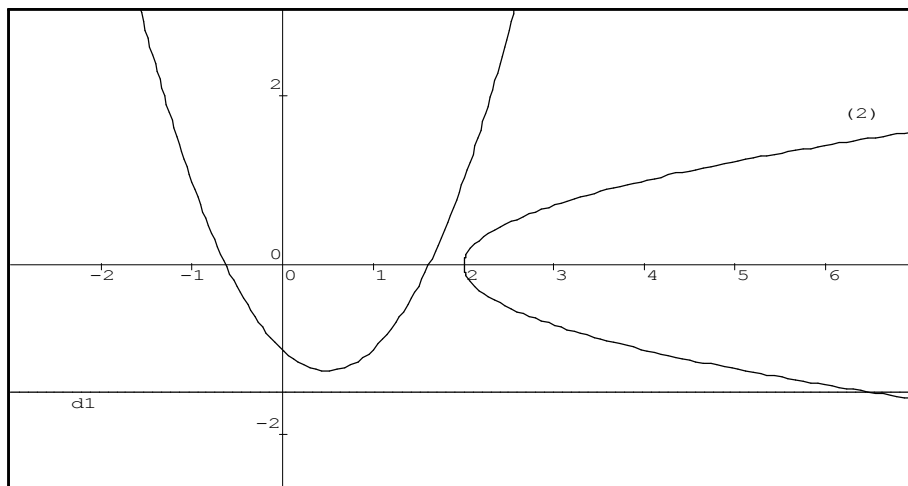
equazioni:
$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c & (1) \\ x = ay^2 + by + c & (2) \end{cases}$$

- (¹) in un sistema di riferimento $Ox \times y$ nel quale l'asse x è parallelo alla direttrice; in questo caso:

vertice: $V \equiv \left\langle -\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right\rangle$; asse di simmetria: $x = -\frac{b}{2a}$

fuoco: $F \equiv \left\langle -\frac{b}{2a}, \frac{1}{4a} - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \right\rangle$; direttrice: $y = -\frac{1}{4a} - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$;

- (²) in un sistema di riferimento $Ox \times y$ nel quale l'asse y è parallelo alla direttrice; le parabole di equazione (²) sono simmetriche di quelle di equazione (¹) (per gli stessi valori di a, b e c) rispetto alla bisettrice $y = x$ del primo e terzo quadrante, quindi le coordinate del vertice e del fuoco e le equazioni dell'asse di simmetria e della direttrice si ottengono da quelle precedenti scambiando x con y .



- **Ellisse:** luogo geometrico dei punti del piano per i quali la somma delle distanze da due punti fissati (fuochi) è costante.

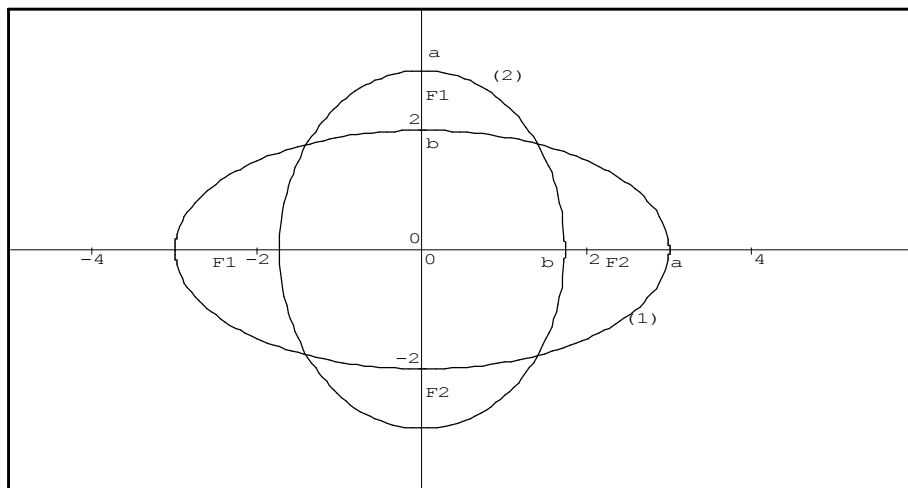
Se P è un punto dell'ellisse, si pone $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$, con $a > 0$.

Se c è la distanza dei fuochi dall'origine, posto $b^2 = a^2 - c^2$:

equazioni:
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 & (1) \\ \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 & (2) \end{cases}$$

- (¹) in un sistema di riferimento $Ox \times y$ nel quale $F_1 \equiv \langle -c, 0 \rangle$ e $F_2 \equiv \langle c, 0 \rangle$;

- (²) in un sistema di riferimento $Ox \times y$ nel quale $F_1 \equiv \langle 0, -c \rangle$ e $F_2 \equiv \langle 0, c \rangle$.



eccentricità: $e = \frac{c}{a} < 1$; assi di simmetria: $x = 0$ e $y = 0$.

- **Iperbole:** luogo dei punti del piano per i quali la differenza delle distanze da due punti fissati (fuochi) è costante.

Se P è un punto dell'iperbole, si pone $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$, con $a > 0$.

Se c è la distanza dei fuochi dall'origine, posto $b^2 = c^2 - a^2$,

equazioni:
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 & (1) \\ \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 & (2) \end{cases}$$

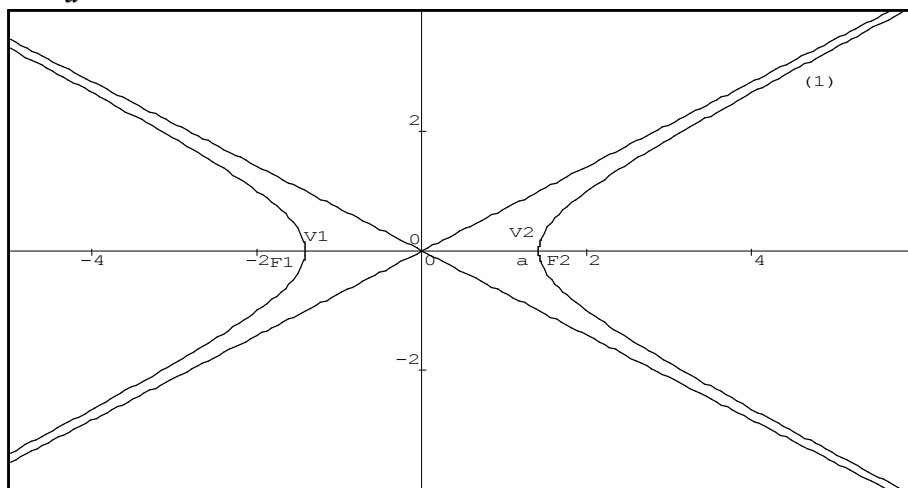
(¹) in un sistema di riferimento Oxy nel quale $F_1 \equiv <-c, 0>$ e $F_2 \equiv <c, 0>$;

asintoti: $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$;

(²) in un sistema di riferimento Oxy nel quale $F_1 \equiv <0, -c>$ e $F_2 \equiv <0, c>$;

asintoti: $x = \frac{b}{a}y$ e $x = -\frac{b}{a}y$;

eccentricità: $e = \frac{c}{a} > 1$; assi di simmetria: $x = 0$ e $y = 0$;



Iperbole equilatera: $b = a$.

equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - y^2 = a^2 \quad (1) \\ y^2 - x^2 = a^2 \quad (1) \\ xy = k \quad (2) \\ y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \quad (3) \end{array} \right.$$

(1) riferite agli assi di simmetria

(2) riferita agli asintoti

(3) $\gamma \neq 0 \wedge \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$; riferita a rette parallele agli asintoti di equazione $x = -\frac{\delta}{\gamma}$ e $y = \frac{\alpha}{\gamma}$.

