PROGRAMMAZIONE LINEARE

PROBLEMA DELLA DIETA

Introduzione

In economia capita spesso di dover distribuire delle risorse fra più attività, in modo da ottenere il minimo costo o il massimo profitto. È il caso dell'utilizzo di più macchine con diverse caratteristiche o di lavoratori con diverse specializzazioni o, comunque, di lavorazioni ottenute con fattori produttivi "concorrenti" fra di loro. Problemi di questo tipo si occupa una branca molto importante della ricerca operativa, che va sotto il nome di **Programmazione Lineare.**
Si parla di Programmazione Lineare quando un problema economico si traduce in un problema di scelta in condizioni di certezza con effetti immediati e il modello matematico è costituito da:

- Una funzione lineare $z = ax + by$ in due variabili (***funzione obiettivo***), della quale si vuole determinare il massimo o il minimo;
- Un sistema di vicoli (detti ***vincoli tecnici***) espressi da equazioni o disequazioni lineari nelle due variabili x e y;
- Un sistema di vincoli (detti ***vincoli di segno***) che garantiscono la non negatività delle variabili, perché non ha senso in problemi di tipo economico parlare di grandezze negative.

Un problema di programmazione lineare richiede di trovare il valore ottimale (massimo o minimo) di una funzione obiettivo lineare del tipo z = ax + by*, dove le incognite* x *e* y *sono soggette ai vincoli nella forma di un sistema di disequazioni. L'insieme dei punti che rispettano tali vincoli è detto regione ammissibile del problema. Ogni punto di questa regione che dà un valore ottimale della funzione obiettivo, è detto soluzione ottimale. Se un problema di programmazione lineare ha una soluzione, questa si trova in un vertice della regione ammissibile.*

Risoluzione di un problema di programmazione lineare

Nel caso in cui le variabili di decisione sono due (x e y, per esempio), si può risolvere un problema di questo tipo con il **metodo grafico**, i cui aspetti fondamentali sono descritti qui di seguito.

I vincoli di segno limitano la ricerca delle soluzioni al primo quadrante del corrispondente piano cartesiano.

Dopo aver tracciato tutte le rette associate alle disequazioni ed equazioni del sistema dei vincoli, se l'intersezione derivante non è un insieme vuoto, si otterrà un poligono (o una regione illimitata) detto **regione ammissibile**, perché contiene tutte le coppie (x; y) che soddisfano le disequazioni e/o le equazioni del sistema. Ciascuna di queste coppie è detta **soluzione ammissibile**, mentre le coppie di valori che corrispondono ai vertici del poligono sono dette **soluzioni ammissibili di base**: fra esse va cercata, se esiste, la soluzione ottima del problema.

In corrispondenza di ogni vertice del poligono, infatti, si calcola il valore della funzione obiettivo, e si sceglie la coppia che rende ottima (cioè massima o minima, a seconda dei casi) la funzione stessa (è questa la conseguenza diretta del **teorema fondamentale della programmazione lineare**: *il massimo ed il minimo di una funzione lineare di un numero qualsiasi di variabili soggetta a vincoli espressi da equazioni e/o da disequazioni lineari, se esistono, si trovano sui vertici della regione ammissibile, e non al suo interno*). Nel caso particolare in cui in corrispondenza di due vertici consecutivi si ottiene lo stesso valore della funzione obiettivo, la teoria della programmazione lineare dimostra che lo stesso valore si ottiene in corrispondenza di un qualsiasi punto compreso tra i due vertici suddetti.

Se i valori delle variabili x e y devono essere numeri interi (esempio: numero di pezzi prodotti alla settimana), si considerano nella regione ammissibile solo i punti aventi per coordinate numeri interi. In sintesi, possiamo riassumere il procedimento in tal modo:

1. Individuiamo al funzione obiettivo $z = ax + by$ e il campo di scelta
2. Costruiamo il sistema dei vincoli di produzione, ricordando anche sempre i vincoli di segno
3. Risolviamo il sistema dei vincoli determinando la regione ammissibile con il metodo grafico
4. Determiniamo le coordinate dei vertici della regione ammissibile
5. Calcoliamo il valore della funzione obiettivo in ogni vertice e stabiliamo la soluzione ottima in relazione al tipo di problema (massimo o minimo)

Storia del problema della dieta

Il problema di dieta è uno dei primi problemi di ottimizzazione studiati negli anni 30 e 40. In primo luogo è stato motivato dal desiderio dell'esercito di fare fronte alle richieste nutrizionali del campo degli GI minimizzando il costo. Uno dei primi ricercatori che si è occupato di questo problema fu George Stigler. Egli fece una congettura trovando la soluzione ottimale al problema lineare usando un metodo euristico. La sua congettura per il costo di una dieta ottimale fu di $39,93 all'anno (prezzi 1939). Nell'autunno del 1947, Jack Laderman del progetto matematico delle Tabelle dell'ufficio nazionale degli standard risolse il modello di Stigler con il nuovo metodo. Era il primo passo per lo studio del problema dell'ottimizzazione. Il problema lineare consistette di un sistema di nove equazioni in 77 incognite. Prese nove impiegati per effettuare il calcoli manuali, per 120 giornate / uomo, per determinare la soluzione ottimale di $39,69. La congettura di Stigler per la soluzione ottimale era sfalsata per soli 24 centesimi l'anno.

Problema della dieta

Sono dati:

- n alimenti da comprare
- m sostanze nutrienti
- $c_1, c_2, \dots, c_n$ costi unitari degli alimenti
- $b_1, b_2, \dots, b_m$ requisiti giornalieri delle sostanze
- $A = [a_{ij}]$ matrice delle composizioni degli alimenti: a_{ij} rappresenta la quantità di nutriente i presente in un'unità di alimento j

Si vuole scegliere la dieta a costo minimo tale da soddisfare i requisiti minimi nutrizionali.

VARIABILI DECISIONALI: $x_1, x_2, \dots, x_n$ quantità di alimenti da acquistare

F.O. (min): $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_1 \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_2 \geq b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{cases} \qquad \text{Sistema dei Vincoli}$$

Nel modello valgono le ipotesi della programmazione lineare. Si suppone quindi che non ci siano economie di scala, ne effetti combinati dovuti alla presenza di diversi alimenti. Le decisioni sono di natura quantitativa, e non qualitativa. Volendo integrare aspetti qualitativi, è possibile esprimere delle preferenze sugli alimenti (ad esempio, in una scala di valori da 1 a 10), ma in questo caso bisogna considerare un duplice obiettivo: minimizzazione dei costi e massimizzazione delle preferenze. Al problema possono essere aggiunti altri tipi di vincoli, come quantità massime giornaliere di sostanze nutrienti, vincoli sulla quantità massima degli alimenti, vincoli di budget. È possibile anche introdurre vincoli di interezza sulle variabili (ad esempio, se dobbiamo comprare polpette o pesci): in questo caso, basta specificare che le variabili sono di tipo intero.

Esempi di problemi di dieta

ESEMPIO-1

Un dietologo deve fornire una dieta a base di due alimenti A_1 e A_2 in modo che abbia almeno 2500 calorie e 3500 unità di vitamina B12. Sapendo che un chilogrammo di A_1 ha 1400 calorie e 1000 unità di vitamina e che un chilogrammo di A_2 ha 800 calorie e 2000 unità di vitamina, si vuol conoscere come deve essere costituita la dieta per essere la più economica possibile, se un chilogrammo di A_1 costa 20 Fr e un chilogrammo di A_2 15 Fr.

Schematizziamo i dati del problema mediante una tabella:

	A_1	A_2	minimo consentito
Calorie per Kg	1400	800	2500
Vitamina per Kg	1000	2000	3500
Costo al Kg	20	15	

Siano x e y rispettivamente i chilogrammi di prodotto A_1 e A_2 da prescrivere; il costo complessivo della dieta si potrà rappresentare mediante l'espressione: $z = 20x + 15y$

È ovvio che non tutte le coppie (x; y) rappresentano soluzioni possibili per il problema proposto.

Il numero di calorie minimo espresso dalla coppia (x; y) è: $1400x + 800y > 2500$

Il numero di unità di vitamina espresso dalla coppia (x; y) è: $1000x +2\,000y > 3500$

Le due quantità in peso devono essere positive: $x > 0$; $y > 0$

Dunque per risolvere il problema posto, dovremmo determinare le soluzioni del sistema che racchiude tutte le condizioni da rispettare (vincoli):

$$\begin{cases} 1400x + 800y > 2500 \\ 1000x + 2000y > 3500 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

e successivamente, calcolare nell'insieme di tali soluzioni il più piccolo valore di z ($z = 20x + 15y$).

La risoluzione del problema può essere eseguita in due modi: grafico e algebrico.

ESEMPIO-2

Dobbiamo decidere la dieta di oggi, potendo scegliere tra filetto di manzo, pecorino, e melanzane. Il filetto costa 15 Euro al kg, il pecorino 9 Euro al kg, le melanzane 3 Euro al kg. Dobbiamo soddisfare i seguenti requisiti nutrizionali: almeno 26 grammi di proteine, almeno 80 grammi di vitamina A, almeno 30 grammi di vitamina B. Nella tabella sono indicati i grammi di nutrienti presenti in ogni kg di alimento.

	filetto	pecorino	melanzane	minimo consentito
proteine	50	15	3	26
vitamina A	10	8	9	80
vitamina B	6	5	12	30
Costo al Kg	15	9	3	

Indicando con x_f la quantità di filetto da acquistare, con x_p la quantità di pecorino da acquistare, e con x_m la quantità di melanzane da acquistare, il problema può essere formulato come segue:

F.O. (min): $z = 15x_f + 8x_p + 3x_m$

$$\begin{cases} 50x_f + 15x_p + 3x_m \geq 26 \\ 10x_f + 8x_p + 9x_m \geq 80 \\ 6x_f + 5x_p + 12x_m \geq 30 \\ x_f\ ,\ x_p,\ x_m \geq 0 \end{cases}$$

ESEMPIO-3

Una dieta prevede un consumo giornaliero di proteine compreso tra 75 g e 125 g e di carboidrati compreso tra 250 g e 300 g con l'ulteriore vincolo che la quantità complessiva di proteine e carboidrati non deve superare i 375 g. Si supponga di utilizzare nella dieta solo Pasta e Carne le cui composizioni sono descritte nella tabella sottostante e riferite a 100 g di alimento.

Alimenti	**Proteine (in g)**	**Grassi (in g)**	**Carboidrati (in g)**
Pasta	11	1	83
Carne	22	5	1

Introduciamo le variabili del modello che andiamo a costruire: indichiamo con *x* e *y* rispettivamente la quantità (numero di etti) di pasta e di carne. Trovare graficamente in dominio d'interesse.

In questo caso il dominio delle soluzioni ammissibili sarà la soluzione del seguente sistema di vincoli

1 $94 \cdot x + 23 \cdot y \leq 375$

2 $11 \cdot x + 22 \cdot y \leq 1\ 25$

3 $11 \cdot x + 22 \cdot y \geq 75$

4 $83 \cdot x + y \leq 300$

5 $83 \cdot x + y \geq 250$