

PROGRAMMAZIONE LINEARE - METODO GRAFICO

Un problema di P.L. a due o tre variabili può essere risolto, oltre che algebricamente, anche con un metodo chiamato METODO GRAFICO.

Le fasi di risoluzione di un problema di P.L. mediante tale metodo sono:

- INDIVIDUAZIONE DELLE INCOGNITE
- COSTRUZIONE DELLA TABELLA A DOPPIA ENTRATA DEI DATI
- TRADUZIONE ALGEBRICA DEI VINCOLI
- RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DEI VINCOLI
- INDIVIDUAZIONE DEL CAMPO DI SCELTA
- RICERCA DEL VERTICE O PARTI DI FRONTIERA CHE OTTIMIZZINO IL PROBLEMA
- CALCOLO DEL VALORE OTTIMALE

Prima di procedere con l'esposizione del metodo grafico può risultare utile fare alcuni richiami.

RICHIAMI

Vengono qui richiamati alcuni concetti sulle disequazioni a 2 o 3 variabili e sulla localizzazione dei massimi o minimi delle funzioni lineari a 1, 2 o 3 variabili, considerati in poligoni o poliedri convessi. Tali concetti sono utilizzati in alcune fasi del metodo grafico.

Ogni equazione del tipo $ax+by+c = 0$ rappresenta una retta del piano e come tale lo divide in due semipiani rappresentati dalle disequazioni

$$ax+by+c \geq 0 \quad \text{e} \quad ax+by+c \leq 0$$

Ma la $ax+by+c = 0$ è anche una funzione lineare a due variabili

$$f(x,y) = ax+by+c$$

e il suo valore dipende dal punto $P(x,y)$ in cui viene calcolata.

Il punto di coordinate (a,b) , con a e b coefficienti delle variabili x e y della funzione $f(x,y)$, risulta appartenere al semipiano in cui la $f(x,y) \geq 0$.

Il segmento con origine in $(0,0)$ ed estremo in (a,b) è perpendicolare alla $f(x,y) = ax+by+c$ ed è orientato secondo il verso di crescita della $f(x,y)$ stessa.

La soluzione di sistemi di disequazioni lineari a 2 o 3 incognite coincide con quella parte di piano comune ai semipiani individuati dalle singole disequazioni.

Questa regione del piano può essere limitata o illimitata.

Nel caso le disequazioni del sistema non hanno soluzioni comuni, cioè i semipiani non si intersecano, il sistema è detto IMPOSSIBILE.

Richiamiamo ora alcune definizioni:

DEFINIZIONE 1

Una figura si dice CONVESSA quando, detti A e B due suoi punti qualunque, il segmento che li ha come estremi è completamente incluso nella figura stessa.

DEFINIZIONE 2

La circonferenza in un cerchio e il perimetro in un poligono si chiamano FRONTIERA della figura stessa.

DEFINIZIONE 3

Si chiama SEMIPIANO DI APPOGGIO di una figura convessa ogni semipiano che contenga tutta la figura e che abbia almeno un punto, della sua retta frontiera, in comune con la frontiera della figura.

Data una figura convessa e limitata ed un fascio di rette parallele ad una retta data, comunque orientata, esistono sempre due rette del fascio che risultano essere frontiera di due semipiani di appoggio della figura e che individuano una striscia di piano (intersezione dei due semipiani) che contiene la figura.

Tale striscia risulta essere la minima tra le strisce ad essa parallele e contenenti la figura.

Sia $ax+by+c = 0$ la retta generatrice del fascio di rette parallele e sia $f(x,y)$ la funzione ad essa corrispondente.

Si può dimostrare che le due rette del fascio, frontiere dei due semipiani di appoggio della figura, corrispondono ai valori che sono, l'uno il massimo l'altro il minimo, di quelli assunti dalla $f(x,y)$ all'interno della figura convessa.

Per sapere quale dei due sia il minimo e quale il massimo, basta applicare il procedimento del segmento orientato alla $f(x,y) = ax+by+c$ ed individuare il semipiano in cui essa è crescente e quello in cui è decrescente.

Queste considerazioni geometriche permettono di capire che:

- il minimo ed il massimo di $f(x,y)$ vengono assunti solo sulla frontiera della figura convessa
- il minimo e il massimo di $f(x,y)$ possono coincidere con un vertice della figura convessa o con un tratto rettilineo della sua frontiera.

Le ultime considerazioni sono valide per ogni funzione associata a un fascio di rette parallele e per ogni figura convessa e se ne deduce un teorema relativo alle funzioni obiettivo di un problema di P.L..

TEOREMA 1

La funzione obiettivo $z = f(x,y) = ax+by+c$ di un problema di P.L. assume il suo valore massimo/minimo solo su un vertice o su tutti i punti di un lato della frontiera di quella parte di piano convessa che rappresenta il campo di scelta individuato dal sistema di vincoli.

METODO GRAFICO

Torniamo ora ad illustrare le fasi del METODO GRAFICO.

La prima fase, INDIVIDUAZIONE DELLE INCOGNITE, consiste nell'individuare e nominare le variabili descrittive del problema, come già visto nelle fasi 1 e 3 dello studio di RICERCA OPERATIVA, e nella impostazione matematica di un problema di PROGRAMMAZIONE LINEARE.

La seconda fase, COSTRUZIONE DELLA TABELLA A DOPPIA ENTRATA DEI DATI, consiste nello schematizzare in una tabella tutti i dati acquisiti (fase 2 dello studio di R.O.) relativi alle variabili d'azione e descrittivi dei condizionamenti relativi al contesto.

La terza fase, TRADUZIONE ALGEBRICA DEI VINCOLI, consiste nella scrittura delle m disequazioni (relative agli m condizionamenti), combinazioni lineari delle variabili e dei dati ad esse associati, che insieme costituiscono il sistema dei vincoli (si veda impostazione matematica di un problema di P.L.).

La quarta fase, RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DEI VINCOLI, è la prima delle fasi peculiari del metodo grafico.

Per ogni disequazione del sistema dei vincoli bisogna individuare il semipiano che la risolve.

Si procede quindi con la quinta fase, INDIVIDUAZIONE DEL CAMPO DI SCELTA, delineando l'intersezione di tutti i semipiani relativi alle disequazioni del sistema dei vincoli.

Essa è una parte di piano convessa, compresa nel primo quadrante, limitata o no, ed è il DOMINIO DEI VALORI AMMISSIBILI del problema, cioè l'insieme di tutte le n-ple di valori possibili per i quali le disuguaglianze del sistema risultano verificate.

La figura così individuata viene chiamata CAMPO DI SCELTA o AREA AMMISSIBILE.

Nella sesta fase, RICERCA DEL VERTICE O DELLE PARTI DI FRONTIERA CHE OTTIMIZZINO, viene tracciata la retta relativa alla funzione obiettivo $z=ax+by+c$ e il segmento, ad essa perpendicolare, di estremi $(0,0)$ e (a,b) che consente di individuare il semipiano in cui la funzione obiettivo è crescente e, quindi, quello in cui è decrescente.

Si procede quindi con l'individuazione del punto o dei punti della frontiera del campo di scelta che è/sono la soluzione ottimale della funzione obiettivo secondo il TEOREMA 1.

Se il problema richiede un massimizzazione si prenderanno gli estremi della frontiera contenuta nel semipiano positivo per la $f(x,y)$, viceversa, se quella chiesta dal problema è una minimizzazione, la soluzione sarà nella frontiera contenuta nel semipiano negativo per la $f(x,y)$.

L'ultima fase, CALCOLO DEL VALORE OTTIMALE, è una fase aritmetica, consiste infatti nel sostituire le coordinate del vertice, individuato nella fase precedente, nella $f(x,y)$ per ottenere il profitto massimo o il costo minimo richiesto dal problema.

Nel caso la soluzione individuata nella fase precedente sia un lato del campo di scelta le possibili scelte, cioè le soluzioni ottimali, sono infinite, almeno teoricamente, tutte equivalenti tra loro.

OSSERVAZIONE 1

Nel caso $a=b=0$ segue che $z=0$, quindi la funzione obiettivo assume sempre lo stesso valore c (costante) e tale valore risulta essere, ovviamente, anche massimo e minimo della funzione stessa.

OSSERVAZIONE 2

Può accadere che le variabili del problema siano tali che nella realtà possono assumere solo valori interi (es. persone), mentre i punti ottimali, individuati con il metodo grafico, abbiano coordinate non intere.

In questo caso si procede cercando il punto di coordinate intere, sempre all'interno del campo di scelta, che risulti più vicino al punto ottimale teorico individuato dal metodo.

Il campo di scelta reale risulta quindi essere un sottoinsieme del campo di scelta teorico, sottoinsieme costituito dai punti con coordinate intere.