

# La Probabilità Assiomatica

## Introduzione

Seguendo l'impostazione di Kolmogorov (1950), si può introdurre la teoria della probabilità seguendo un modo di procedere detto "assiomatizzazione", che consiste nei seguenti momenti:

- a) si introducono i concetti primitivi (prova, evento e probabilità), cioè delle nozioni originarie e intuitive;
- b) mediante tali concetti si stabiliscono delle affermazioni, detti postulati o assiomi, che non si dimostrano;
- c) dai postulati, e solo tramite essi, si deducono tutte le possibili conseguenze, sia logiche che matematiche, pervenendo alla dimostrazione dei teoremi del calcolo delle probabilità.

## Algebra degli eventi

Indichiamo con  $(A, B, C, D, E, \dots)$  gli eventi quali risultati di una prova ben definita. Fra essi definiamo le seguenti tre operazioni principali:

### 1. Unione

L'unione (o somma logica) tra due eventi  $A$  e  $B$  è quell'evento  $C$  che si verifica quando si verifica  $A$  oppure  $B$  o  $A$  e  $B$  contemporaneamente:  $C = A \cup B$  (e leggeremo "A o B");

### 2. Intersezione

L'intersezione (o prodotto logico) fra due eventi  $A$  e  $B$  è quell'evento  $D$  che si verifica quando si verifica sia  $A$  che  $B$  contemporaneamente:  $D = A \cap B$  (e leggeremo "A e B");

### 3. Negazione

La negazione di un evento  $A$  è quell'evento  $E$  che si verifica allorché  $A$  non si verifica:  $E = \bar{A}$  (e leggeremo "non A").

## DEFINIZIONI

### Definizione 1.

Chiameremo evento certo, e lo indicheremo con  $I$ , l'evento che si verifica sempre.

### Definizione 2.

Chiameremo evento impossibile, e lo indicheremo con  $\bar{E}$ , l'evento che non può mai verificarsi.

### Definizione 3.

Dati due eventi  $A$  e  $B$  tali che non possono presentarsi contemporaneamente, diremo che essi sono incompatibili, cioè:

$$A \text{ e } B \text{ eventi incompatibili} - A \cap B = \emptyset$$

### Definizione 4.

Dati due eventi  $A$  e  $B$  tali che uno di essi deve presentarsi, diremo che essi sono necessari, cioè:

$$A \text{ e } B \text{ eventi necessari} - A \cup B = I$$

### Definizione 5.

L'insieme degli eventi possibili in relazione ad un determinato fenomeno è detto spazio campione e lo indichiamo con  $S$ .

## Postulati e teoremi del calcolo delle probabilità

### Definizione

Sia  $S$  lo spazio campionario,  $C$  la classe degli eventi e sia  $P$  una funzione reale definita su  $C$ . Allora  $P$  si chiama funzione di probabilità e  $P(A)$  la probabilità dell'evento  $A$ , se e solo se sono soddisfatti i seguenti **assiomi**:

1. Per ogni evento  $A$  in  $C$ :  $P(A) > 0$
2. Per l'evento certo  $S$  in  $C$ :  $P(S) = 1$
3. Per ogni numero di eventi mutuamente esclusivi  $A_1, A_2, \dots$ , in  $C$ :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

### Osservazione

Secondo questa definizione, la probabilità di un qualsiasi evento  $A$  è un numero non negativo e la probabilità dell'evento certo  $S$  è 1.

Se  $A$  e  $B$  sono due eventi disgiunti la probabilità della loro unione  $P(A \cup B)$  è semplicemente la somma delle due probabilità  $P(A)$  e  $P(B)$ .

Da questi assiomi, vengono ricavati i seguenti importanti teoremi:

### Teorema 1.

Se  $A \dot{\bar{I}} B$  ( $A$  implica  $B$ ), allora  $P(A) < P(B)$  e  $P(B - A) = P(B) - P(A)$ .

### **Teorema 2.**

Per ogni evento  $A$ ,  $0 \leq P(A) \leq 1$ , cioè la probabilità di un dato evento è compresa tra 0 e 1.

### **Teorema 3.**

$P(\emptyset) = 0$ , cioè l'evento impossibile ha probabilità 0.

### **Teorema 4.**

Se  $\bar{A}$  è il complemento di  $A$  allora  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

### **Teorema 5.**

Se  $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ , in cui  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sono mutuamente esclusivi, allora:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

**(probabilità totale per eventi incompatibili).**

In particolare, se  $A = S$  allora:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1$$

### **Teorema 6.**

Se  $A$  e  $B$  sono due eventi qualsivoglia (eventi compatibili), allora:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

**(probabilità totale per eventi compatibili).**

Più in generale, se  $A_1, A_2, A_3$  sono tre eventi qualsivoglia, allora:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

### **Esempio**

Consideriamo un'urna contenente 12 palline numerate da 1 a 12 e consideriamo i due eventi  $A$ : "estrazione di un numero pari" e  $B$ : "estrazione di un numero divisibile per tre", qual è la probabilità di estrarre un numero pari o un numero divisibile per tre?

Poiché i numeri pari sono 6, su un totale di 12, la probabilità di estrarre un numero pari è  $\frac{1}{2}$  ed essendo i numeri divisibili per 3 in numero di quattro, la probabilità di estrarre un numero divisibile per tre è  $\frac{4}{12}$ . Trattandosi di due eventi compatibili, calcoliamo la probabilità del loro prodotto logico. I numeri pari e divisibili per tre sono soltanto il 6 e il 12 e, dunque, la probabilità della loro estrazione è  $\frac{2}{12}$ .

Concludendo:

$$P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3} = 0.67.$$

### Teorema 7.

Per eventi  $A$  e  $B$  qualsivoglia:

$$P(B \setminus A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

### Probabilità condizionata

Dati due eventi  $A$  e  $B$  dello spazio campionario  $S$ , capita talvolta di dover valutare la probabilità di  $A$  nell'ipotesi che  $B$  si sia già verificato o viceversa. E' opportuno allora dare la seguente definizione:

*Dati due eventi  $A$  e  $B$  tali che  $P(A) > 0$ , la probabilità condizionata (congiunta) dell'evento  $B$  dato l'evento  $A$ , denotata con  $P(B | A)$ , viene definita come:*

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

e la probabilità composta per eventi dipendenti si può esprimere:

$$P(A \cap B) = P(A) P(B | A).$$

### Osservazione

Dati tre eventi  $A, B, C$ , si ha che:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) P(B | A) P(C | A \cap B).$$

La relazione precedente ci dice che la probabilità che  $A, B, C$  si verifichino tutti e tre è pari alla probabilità che  $A$  si verifichi, moltiplicata per la probabilità che anche  $B$  si verifichi, supponendo che  $A$  si sia già verificato; moltiplicata infine per la probabilità che  $C$  si verifichi, supposto che tanto  $A$  quanto  $B$  si siano già verificate.

### Eventi indipendenti

Si dice che un evento  $B$  è indipendente da un evento  $A$  se la probabilità che  $B$  si verifichi non è influenzata dal fatto che  $A$  si sia verificato oppure no. In altri termini, se la probabilità di  $B$  è uguale alla probabilità condizionata di  $B$  dato  $A$ . Allora, tenendo in considerazione il teorema delle probabilità composte, possiamo dare le seguenti definizioni:

#### Definizione 1.

Due eventi,  $A$  e  $B$ , si dicono indipendenti se e solo se:

$$P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

**(probabilità composta per eventi indipendenti).**

## Definizione 2.

Dati tre eventi,  $A$ ,  $B$  e  $C$ , essi si dicono indipendenti se e solo se:

$$i) P(A \cap B) = P(A) P(B); P(A \cap C) = P(A) P(C); P(B \cap C) = P(B) P(C);$$

$$ii) P(A \cap B \cap C) = P(A) P(B) P(C).$$

Si osservi che la condizione *ii)* non discende dalla *i)*, ovvero tre eventi possono essere a due a due indipendenti e non essere tra loro indipendenti.

## Teorema di Bayes.

Sia  $A$  un evento generico e supponiamo che esso si verifichi se e solo se si verifica uno degli eventi incompatibili  $B_1, B_2, \dots, B_n$  ovvero  $A$  è condizionato dalla somma logica,  $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$ , che indicheremo brevemente con  $\bigcup_{\gamma} B_{\gamma}$ .

Se  $A \subset \bigcup_{\gamma} B_{\gamma}$  e la probabilità che si verifichi  $A$  non è nulla, allora:

$$P(B_{\gamma} / A) = \frac{P(B_{\gamma})P(A / B_{\gamma})}{\sum_{\gamma=1}^n P(B_{\gamma})P(A / B_{\gamma})}$$

Si osservi che, poiché l'evento  $A$  si verifica se e soltanto se si verifica solo uno degli eventi  $B_{\gamma}$  (in quanto tali eventi sono incompatibili), l'insieme costituito dagli eventi  $B_{\gamma}$  è l'insieme delle cause che spiegano l'evento  $A$ .