Definizione di funzione

Una funzione *f* tra due insiemi non vuoti *A* e *B* è una regola che associa ad ogni elemento di *A* un unico elemento di *B*.
Indichiamo questa corrispondenza tra insiemi: $f : A \rightarrow B$.

■Una funzione $f : A \rightarrow B$, *A* e *B* sottoinsiemi di **R**, si dice **matematica** o **analitica** se esiste una relazione *y = f(x)* che permette di calcolare univocamente il corrispondente valore *y* appartenente a B.

■Questa corrispondenza tra elementi si indica con: *y = f(x)* (si legge *effe* di *x*).
L'equazione *y = f(x)* è l'espressione analitica della funzione matematica, con *x* e *y* rispettivamente variabile indipendente e variabile dipendente.

■Se *x* è un qualsiasi elemento dell'insieme *A* ($\forall x \in A$) con *f (x)* indichiamo l'elemento $y \in B$ che corrisponde ad *x* mediante la funzione *f* .
L'elemento *y* di *B* si dice immagine di *x* mediante *f*.

■Il **dominio** D (o Campo di Esistenza CdE, o anche insieme di definizione) di una funzione è il più ampio sottoinsieme di **R** costituito da tutti e soli i valori della *x* per cui esistano finiti i corrispondenti valori di *y = f(x).*

$D = \{ x \in R \,/\, \text{esista finito } y = f(x) \text{ in } R \}$

■Il **codominio** C di una funzione è il sottoinsieme di **R** costituito da tutti gli elementi y corrispondenti dei punti *x* appartenenti al dominio della funzione.

$C = \{ y \in R \,/\, \exists x \in D \text{ la cui immagine } f(x) = y \}$

Classificazione

E' possibile *classificare* le funzioni considerando il tipo di operazioni matematiche che compaiono nella sua espressione analitica. Si distinguono:

■le *funzioni algebriche* (in cui compaiono solo operazioni di tipo algebrico: addizione sottrazione, moltiplicazione, divisione, potenza);

■le *funzioni trascendenti* (contenenti operazioni trascendenti: logaritmo, esponenziale o le funzioni goniometriche).

■Le funzioni algebriche possono essere:

» razionali intere

[in generale sono del tipo: $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} x + a_n$; es: $y = 3x^2 - 2x + 7$]

» razionali fratte

[sono del tipo $y = \dfrac{A(x)}{B(x)}$ con *A(x)* e *B(x)* polinomi nella variabile *x*; es. $y = \dfrac{3x^3 - 2x + 1}{x - 2}$]

» irrazionali

[contenenti radicali; es: $y = 2x - \sqrt{3x^2 - 1}$]

■Le funzioni trascendenti possono essere:

» logaritmiche [es: $y = \log(x-1)$]

» esponenziali [es: $y = 3x - 1 + 4e^{x-1}$]

» goniometriche [es: $y = tgx - 3senx$]

SCHEMATIZZANDO:

funzioni

algebriche		**trascendenti**		
razionali	**irrazionali**	**logaritmiche**	**esponenziali**	**goniometriche**
intere	**fratte**			

Studio grafico-analitico delle funzioni reali a variabile reale $\begin{array}{c} f: R \longrightarrow R \\ x \mapsto y = f(x) \end{array}$

Sequenza dei passi minimi utili allo studio di una funzione reale $y = f(x)$

Stabilire se la funzione presenta delle simmetrie e/o è periodica

» Se $y = f(x)$ è simmetrica rispetto all'asse *y*, deve verificarsi:
$f(x) = f(-x)$. (funzione pari)

» Se $y = f(x)$ è simmetrica rispetto all'origine degli assi, deve verificarsi:
$-f(x) = f(-x)$. (funzione dispari)

Nel caso in cui la funzione sia simmetrica, si può restringere lo studio della funzione ai soli valori positivi e dunque costruire il grafico nel solo semipiano $x \geq 0$; per ottenere il grafico completo basterà simmetrizzare la curva ottenuta rispetto all'asse *y* o all'Origine.

» Se $y = f(x)$ è periodica, si può limitare lo studio all'ampiezza del periodo.

Determinare il Campo di Esistenza, o Dominio, della funzione
(Si tratta di individuare gli intervalli in cui la funzione assume valori Reali; ovvero determinare l'insieme dei punti x_i in cui la funzione non è definita ed escluderli).

Classifica il tipo di funzione

» se è una funzione razionale intera il suo dominio è costituito da tutto l'asse Reale
» se la funzione è una razionale fratta, imponi che il denominatore sia diverso da zero.
I punti che annullano il denominatore della funzione non appartengono al suo CDE, per tali punti x_i la funzione non esiste; le rette verticali passanti per quei punti sono asintoti verticali per la curva;
» se la funzione è irrazionale, guarda l'indice del radicale:
» se è pari dovrai imporre che il radicando non sia negativo poiché la funzione è a valori Reali,
» se è dispari, non ci sono imposizioni.
» Se la funzione è logaritmica ricordati di imporre che l'argomento del logaritmo sia strettamente positivo.
» Se la funzione è esponenziale non ci sono imposizioni.
» Se la funzione è trigonometrica bisognerà imporre che gli argomenti della funzione tangente siano diversi da multipli dispari di angoli retti $\neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k \in Z$.
» Quando la funzione è composta da funzioni di tipo diverso tutte le imposizioni dovranno essere verificate contemporaneamente, ovvero le condizioni dovranno essere legate e condotte algebricamente come un sistema di equazioni.

Scrivi il dominio come UNIONE dei diversi intervalli in cui la funzione assume valori Reali.

Segna graficamente gli intervalli o i punti in cui la funzione non esiste.

Studiare con i limiti il comportamento della funzione agli estremi del CDE

Calcola i limiti, sinistro e destro, della funzione nell'intorno dei punti x_i
$\lim_{x \to x_i} f(x) =$ ......
e all'infinito
$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) =$ ......
Riporta con un segno grafico il comportamento della curva nell'intorno di tali punti.

Ricerca degli eventuali asintoti verticali e orizzontali

» Se $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$,
$x = c$ è un asintoto verticale.
» Se $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l$ (finito) ,
$y = l$ è un asintoto orizzontale

Ricercare l'eventuale intersezione della funzione con l'asse *x*

Poni a sistema l'equazione della curva con l'equazione dell'asse delle ascisse:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$$

ovvero risolvi l'equazione $f(x) = 0$.

Ricercare l'eventuale intersezione della funzione con l'asse *y*

Poni a sistema l'equazione della curva con l'equazione dell'asse delle ordinate:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases}$$

ovvero calcola $y = f(0)$.

Studiare il segno della funzione

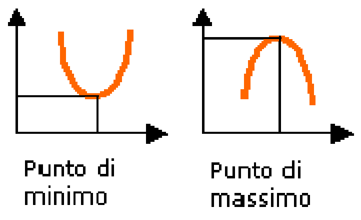
Studia la disequazione $f(x) > 0$.
Negli intervalli in cui la funzione risulta positiva, la curva sarà situata sopra l'asse delle ascisse.
Riporta i risultati sul grafico, escludendo le zone che la curva non attraversa.

Calcolo delle derivate prima e seconda
Il calcolo della derivata prima serve per determinare gli intervalli in cui la funzione cresce o decresce, e per individuare i probabili punti di massimo e minimo relativi.
Il calcolo della derivata seconda serve per determinare gli intervalli in cui la curva è concava o convessa, e per individuare i probabili punti di flesso.

$y' = f'(x) =$ ....

$y'' = f''(x) =$ ....

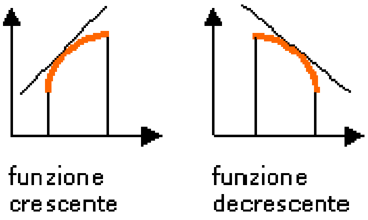
Ricerca degli eventuali punti di massimo e di minimo relativo



C.N. affinché un punto sia di massimo o di minimo relativo è che $y' = f'(x) = 0$.

Dunque si tratta di risolvere tale equazione. I valori x_i che la soddisfano sono solo probabili punti di massimo o minimo relativi, in quanto potrebbero anche essere punti di flesso.
I punti in cui si annulla la derivata prima si dicono punti stazionari o punti critici.

Studio della monotonia della funzione



Per sapere se questi sono punti di massimo o di minimo per la curva si può procedere in due modi.

1° metodo: si studia il segno della derivata prima, ovvero si impone che $f'(x) > 0$.
Lo studio degli intervalli di monotonia, cioè dove la curva è crescente o decrescente, ci fa comprendere se i punti trovati sono di massimo o di minimo.
Se la derivata nell'intorno di tali punti non cambia di segno, questi non sono né di massimo né di minimo.

2° metodo: si sostituiscono le ascisse dei punti x_i nella derivata seconda e si guarda il segno che questa assume.

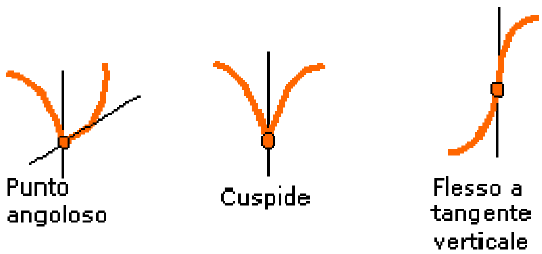
$f''(x_i) > 0$: se è positiva la concavità sarà rivolta verso l'alto perciò il punto è di minimo;
$f''(x_i) < 0$: se è negativa la concavità sarà rivolta verso il basso per cui il punto è un massimo.
$f''(x_i) = 0$: se è nulla il punto è molto probabilmente di flesso.

Calcolo delle ordinate degli eventuali punti di massimo e di minimo relativo

Sostituisci una alla volta le ascisse dei punti di massimo o di minimo nell'equazione della curva e ricava l'ordinata.

Riporta con un segno i risultati sul grafico.

Studio dei punti di non derivabilità



Determina il Campo di Esistenza della derivata prima. $y' = f'(x)$

Se x_0 è un punto appartenente al CDE della funzione, ma è un punto di *non derivabilità*:

» se $\lim_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=m$ e $\lim_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l$ con $l\neq m$,

allora x_0 è un *punto angoloso*;

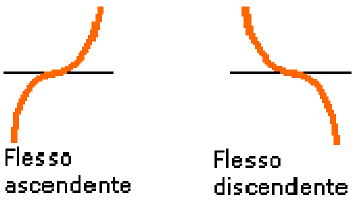
» se $\lim_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\pm\infty$ e $\lim_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\mp\infty$,

allora x_0 è una cuspide

» se $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\pm\infty$,

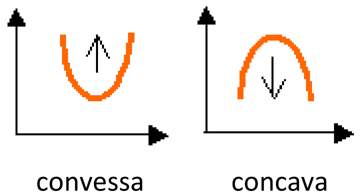
allora x_0 è un *flesso a tangente verticale*.

Ricerca degli eventuali punti di flesso a tangente orizzontale



Imponi $f''(x)=0$ e risolvi.
I valori che soddisfano l'equazione sono molto probabilmente le ascisse dei punti di flesso.

Studio della concavità e della convessità della funzione:



Studia il segno della derivata seconda: $f''(x)>0$.

Negli intervalli in cui risulta positiva ($f''(x)>0$), la curva rivolge la concavità verso l'alto (convessa), in caso contrario ($f''(x)<0$) volge la concavità verso il basso (concava).

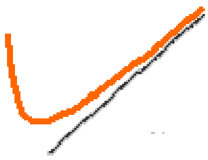
Le soluzioni di $f''(x)=0$ sono le ascisse dei punti in cui la curva cambia la sua concavità, i punti di flesso, e la tangente si dispone orizzontalmente.

Calcolo delle ordinate degli eventuali punti di flesso

Sostituisci una alla volta le ascisse dei punti di flesso nell'equazione della curva e ricava l'ordinata corrispondente.

Riporta con un segno i risultati sul grafico.

Ricerca degli eventuali asintoti obliqui



Se $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, allora si calcolano i due limiti :

$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ che fornisce il coefficiente angolare *m* della retta, e

$q = \lim_{x \to \infty} \left[f(x) - mx \right]$ che fornisce il valore del termine noto *q* della retta.

Se questi due limiti esistono e sono finiti, allora la retta $y = mx + q$ è un asintoto della curva.

A questo punto dovresti avere sufficienti elementi per comporre qualitativamente l'andamento della curva.