Studio di alcune funzioni di interesse economico-finanziario

Introduzione

Uno dei concetti fondamentali nello studio della matematica è il concetto di funzione.

Definizione: Dati due insiemi non vuoti A e B, si chiama **applicazione o funzione** (univoca) di A in B una qualsiasi legge che fa corrispondere ad ogni elemento x di A uno e un solo elemento y di B.

I termini "funzione" e "applicazione" sono sinonimi, tuttavia il termine funzione è più tradizionale e lo si impiega di preferenza quando A e B sono insiemi di numeri reali.

Precisamente: Dati A e B due sottoinsiemi non vuoti di R, si chiama **funzione reale di una variabile reale** una qualsiasi legge che fa corrispondere ad ogni elemento $x \in A$ uno e un solo elemento $y \in B$.

x **variabile indipendente** y **variabile dipendente**

A, insieme dei valori di x, si dice **insieme di esistenza**, o **insieme di definizione** o **dominio della funzione**

$f(A)$, insieme dei valori di y, si dice **codominio della funzione**.

Definire una funzione analiticamente significa dare la relazione matematica che lega le due variabili x e y. La forma generale di una rappresentazione di questo tipo è $y = f(x)$.

Le funzioni possono essere classificate in base all'espressione analitica che le rappresenta; il modo più efficace per studiarne la relazione tra le variabili consiste nel darne una rappresentazione grafica.

Se si interpreta la variabile indipendente come ascissa di un punto su di un piano cartesiano e la variabile dipendente come l'ordinata dello stesso punto, allora ad ogni funzione può essere associato un insieme di punti che ne rappresenta il grafico.

Definizione: Fissato su di un piano un sistema di assi cartesiani, il grafico di una funzione $y = f(x)$ è l'insieme dei punti del piano le cui coordinate sono $(x; f(x))$.

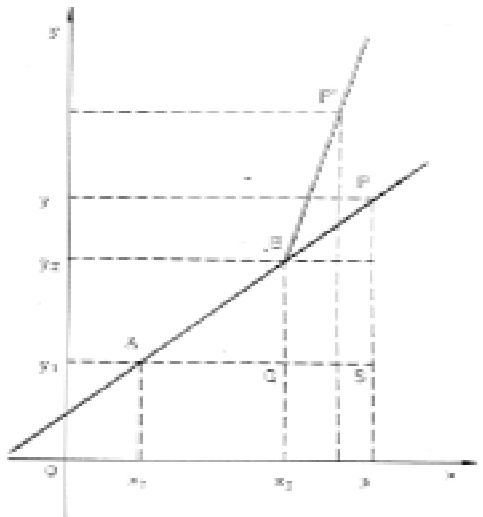
In questo lavoro si studiano i grafici di alcune funzioni che hanno un particolare interesse nello studio di fenomeni di tipo economico-finanziario. Molte di queste funzioni sono definite per valori **discreti** della variabile indipendente. Qui se ne effettuerà lo studio considerando la variabilità in un insieme **continuo** di valori.

Funzione lineare

Una funzione lineare ha la forma $y = ax + b$, dove a e b sono numeri reali e $a \neq 0$.

Il grafico di una funzione lineare è una retta. Viceversa, tutti i punti del piano che appartengono ad una retta soddisfano o la relazione $y = ax + b$, con a e b numeri reali , o la relazione $x = k$.

Dimostrazione: Siano $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$ due punti distinti con ascisse e ordinate diverse dati in un piano in cui sia stato stabilito un sistema di assi cartesiani. Un punto $P(x; y)$ appartiene alla retta che passa per A e B se è allineato con essi.



Dalla figura si può dedurre che la condizione affinchè P sia allineato con A e B è che i triangoli AQB e ASP siano simili (due triangoli sono simili se hanno gli angoli uguali; nei triangoli in questione ciò accade in quanto i triangoli sono rettangoli, l'angolo in A è in comune, l'angolo in B e quello in P sono uguali per differenza di angoli uguali). Il punto P_1 non è allineato con A e B. Nei triangoli simili inoltre, i lati sono proporzionali, per cui si può scrivere la seguente proporzione: $\frac{SP}{QB} = \frac{AS}{AQ}$.

Facendo ricorso alle coordinate dei punti in questione si ricava: $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

Poiché in una proporzione il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi si ottiene:

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1)$$

da cui si ricava: $y(x_2 - x_1) - y_1 x_2 + y_1 x_1 = x(y_2 - y_1) - x_1 y_2 + x_1 y_1$ e quindi:

$$y(x_2 - x_1) = x(y_2 - y_1) - x_1 y_2 + y_1 x_2.$$

Nell'ipotesi fatta si ha: $x_2 - x_1 \neq 0$, cioè i punti A e B non hanno la stessa ascissa; allora è possibile dividere ambo i membri per $x_2 - x_1$ ottenendo:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}.$$

Se si pone: $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ e $b = \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$ si ha: $y = ax + b$.

Se i punti avessero la stessa ascissa si avrebbe:
$x_2 - x_1 = 0$, allora, essendo i punti distinti, è possibile dividere ambo i membri per $y_2 - y_1$ e semplificando si ottiene: $x = x_1$ o, più in generale, $x = k$.
L'equazione $y = ax + b$ rappresenta quindi tutte le rette del piano che non sono parallele all'asse delle y; l'equazione $x = k$ rappresenta le rette parallele all'asse y.

Tra le funzioni di carattere economico-finanziario prendiamo in esame:

A) Montante in regime di capitalizzazione semplice

B) Costi di produzione

A) Montante in regime di capitalizzazione semplice

Come è noto, se con $M = C_0$ si indica il capitale iniziale, con i il tasso di interesse, con t la durata dell'operazione e con M il montante, la legge di capitalizzazione semplice è espressa analiticamente dalla relazione

$$M = C_0(1 + it)$$

Studiamo l'andamento del montante al variare del tempo.
Posto $C_0 = 1$, la relazione è quindi

$$M = (1 + it)$$

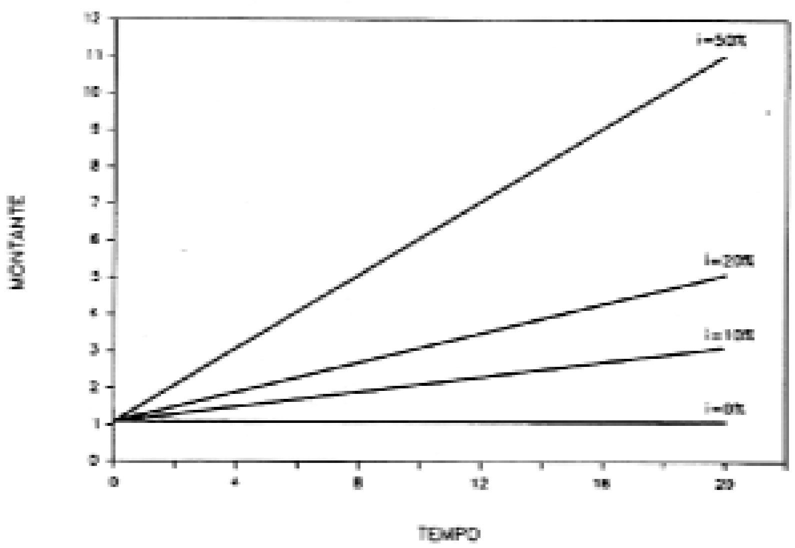
In essa t è la variabile indipendente, M la variabile dipendente ed i è un parametro. La funzione rientra nel caso generale di funzioni lineari del tipo

$$y = ax + 1$$

(y è il montante, a il tasso di interesse, x il tempo) ove però si considera $x \in [0,+\infty[$ ed $a \in [0,+\infty[$.

Osservazione: Per qualsiasi valore di a, per $x = 0$ si ha $y = 1$ (per $t = 0$, si ha cioè $M = C_0$).

Il grafico di questa funzione è dunque un fascio di rette (per essere più precisi, dovendo essere $x \in [0,+\infty[$ si dovrebbe dire un fascio di semirette) con centro nel punto $P(0;1)$ e con coefficiente angolare positivo.



Legge di capitalizzazione semplice: montante in funzione del tempo per diversi valori del tasso

Nella figura si può osservare il grafico per i tassi di interesse: 0%, 10%, 20% e 50%.

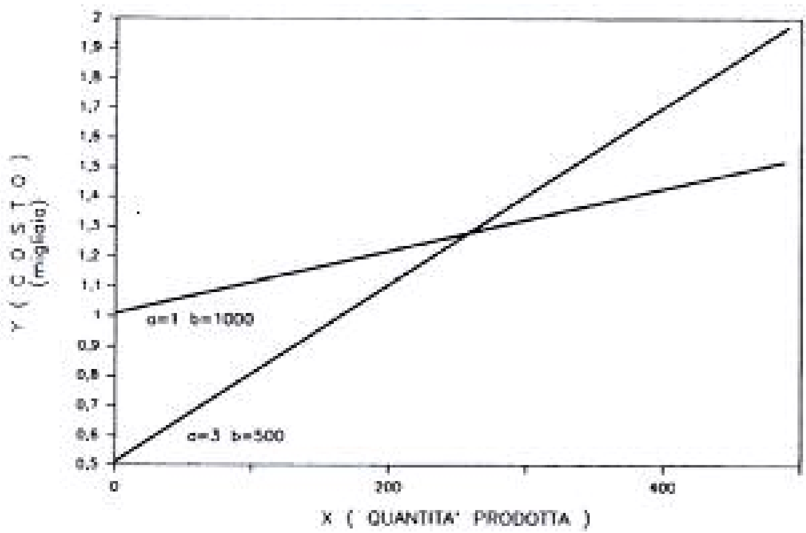
Se il tasso di interesse è maggiore al passare del tempo si matura un montante maggiore perché l'inclinazione della retta rispetto all'asse dei tempi è maggiore.
Normalmente $0 < x < 1$ (cioè il tasso di interesse è compreso tra lo 0% e il 100%).
Perciò, non conviene usare la stessa unità di misura per l'asse x *e* per l'asse y in quanto la retta verrebbe troppo schiacciata sull'asse x.
Inoltre essendo $a > 0$, le rette hanno coefficiente angolare positivo e quindi la funzione risulta sempre crescente.

B) Costi di produzione

Se si indica con a il costo unitario per la produzione di un dato oggetto, con b un costo fisso giornaliero, la relazione

$$C(x) = ax + b \quad \text{con} \quad a > 0,\ b > 0$$

esprime il costo di produzione giornaliero C in funzione della quantità prodotta x.



Grafici dei costi di produzione lineari

Anche in questo caso, considerando $x \in [0, +\infty[$ (rappresentando la quantità prodotta, in genere $x \geq 0$), si ha una funzione lineare. Dal momento che a deve essere positivo, il coefficiente angolare della retta che rappresenta tale funzione è positivo e quindi la funzione dei costi risulta sempre crescente qualunque sia il valore di x. In figura sono riportati i grafici per diversi valori di a e di b.
In relazione ai costi di produzione si definiscono altre due funzioni:
il costo medio (o unitario) e **il costo marginale**.

Definizione: Si definisce **costo medio o unitario** il rapporto tra il costo totale per produrre la quantità x e la quantità x prodotta, cioè:

$$c_u : \quad y = \frac{C(x)}{x} \qquad x > 0$$

Definizione: Se la funzione $C(x)$ è definita nel discreto o non è derivabile, si definisce **costo marginale** il costo sostenuto per ottenere una unità addizionale di prodotto, o anche il rapporto incrementale tra l'incremento del costo e l'incremento della quantità prodotta:

$$c_m \; : \; y = \frac{\Delta C(x)}{\Delta x}$$

Se la funzione del costo totale è derivabile, il **costo marginale**, è la derivata della funzione del costo totale rispetto alla quantità prodotta:

$$c_m \; : \; y = \frac{dC(x)}{dx}$$

Poiché la funzione del costo totale esaminata in questo caso è lineare, il costo medio è dato da:

$$c_u : \quad y = \frac{ax+b}{x} \qquad x > 0$$

Il grafico è un ramo di iperbole equilatera decrescente di asintoti $x = 0$ e $y = a$.

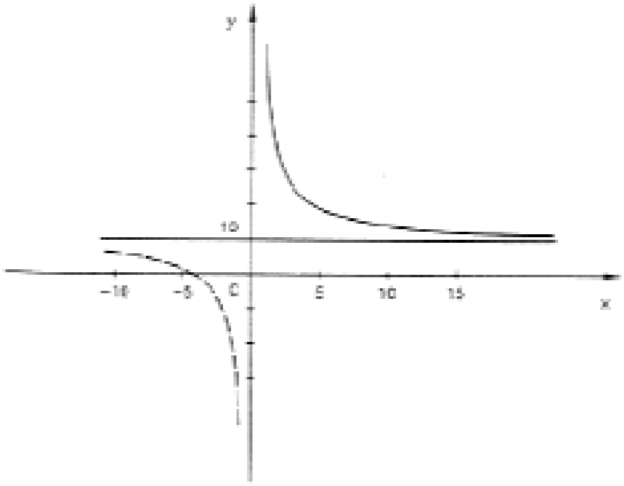


Grafico della funzione dei costi medi della funzione dei costi $C(x) = ax + b \quad a > 0\,, b > 0$

Il costo marginale è una funzione costante; infatti: $y = \dfrac{dC(x)}{dx} = a$ e risulta una retta parallela all'asse delle x.

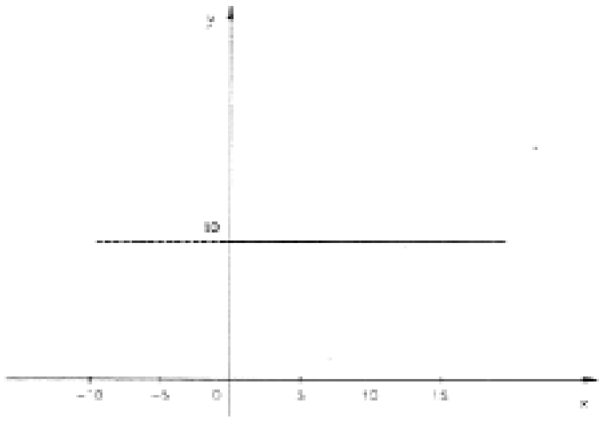


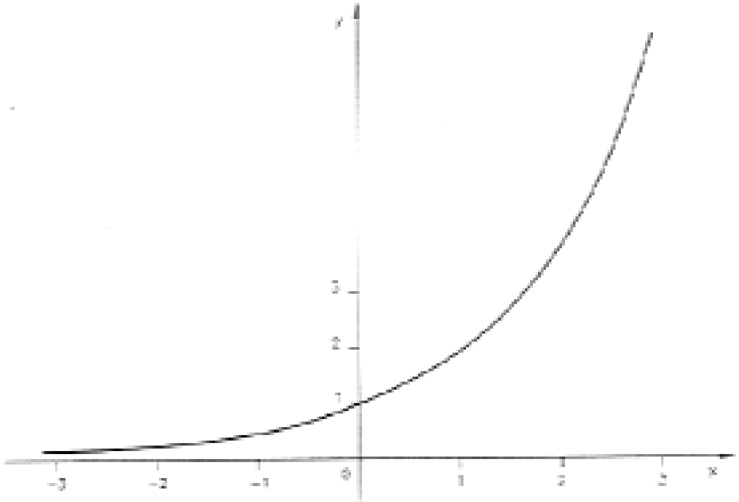
Grafico della funzione dei costi marginali della funzione dei costi $C(x) = ax + b \;\; a > 0\,, b > 0$

Dal punto di vista economico significa che la spesa da sostenere per aumentare di una unità la produzione di un dato oggetto, quando questa abbia già raggiunto il valore x, è uguale al costo unitario per la produzione di quell'oggetto.

Funzione esponenziale

La funzione esponenziale è data dalla relazione $y = a^x$ con $a \in \left]0, +\infty\right[$.
Per studiare l'andamento della funzione esponenziale studiamo il grafico della funzione $y = 2^x$. Ricaviamo una tabella riportando i valori della y per alcuni valori della x. Dalla tabella o dal grafico corrispondente si possono dedurre le seguenti proprietà che, valide per $a = 2$, sono più generali e valgono per ogni $a > 1$:

x	y
-6	$1/2^6 = 0{,}015625$
-5	$1/2^5 = 0{,}03125$
-4	$1/2^4 = 0{,}0625$
-3	$1/2^3 = 0{,}125$
-2	$1/2^2 = 0{,}25$
-1	$1/2^1 = 0{,}5$
0	$2^0 = 1$
1	$2^1 = 2$
2	$2^2 = 4$
3	$2^3 = 8$
4	$2^4 = 16$
5	$2^5 = 32$
6	$2^6 = 64$



- qualunque sia il valore di x che si prende in considerazione la y corrispondente è sempre positiva;
- se x assume valori sempre maggiori anche la y assume valori sempre maggiori; in termini più precisi si dice che se x tende a più infinito, anche y tende a più infinito; in simboli:

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$$

- se x assume valori sempre più piccoli (cioè grandi in valore assoluto, ma negativi), il valore della y diventa sempre più piccolo (cioè vicino a zero); in termini più precisi, se x tende a meno infinito, y tende a zero; in simboli:

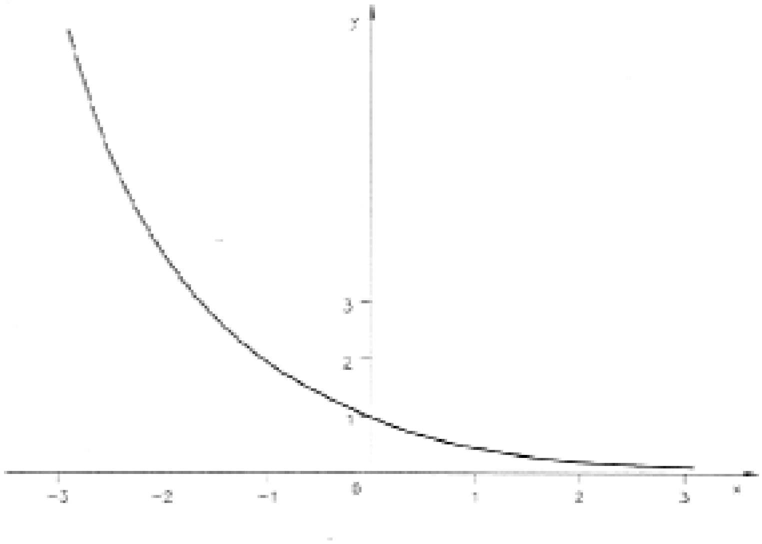
$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$$

- per $x = 0$, $y = 1$.

Altre considerazioni vanno fatte su a:

- non può essere $a < 0$, infatti dalla definizione si potrebbe avere il caso $(-1)^{1/2}$, cioè la radice quadrata di un numero negativo che naturalmente non ha senso nell'insieme dei numeri reali;
- $a = 0$ è un caso banale tranne per il caso $x = 0$ per cui non ha senso parlare del valore di 0^0 e questa viene detta forma indeterminata;
- $0 < a < 1$ è invece un caso notevole; per analizzarlo meglio studiamo la funzione $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ tabulando i valori della y per qualche valore della x:

x	y
-6	$2^6 = 64$
-5	$2^5 = 32$
-4	$2^4 = 16$
-3	$2^3 = 8$
-2	$2^2 = 4$
-1	$2^1 = 2$
0	$2^0 = 1$
1	$1/2^1 = 0.5$
2	$1/2^2 = 0.25$
3	$1/2^3 = 0.125$
4	$1/2^4 = 0.0625$
5	$1/2^5 = 0.03125$
6	$1/2^6 = 0.015625$



Si possono notare alcune questioni importanti:

- anche in questo caso per ogni valore di x, il corrispondente valore di y è positivo;
- se x assume valori sempre minori (cioè grandi in valore assoluto, ma negativi), la y assume valori sempre maggiori; in termini più precisi si dice che se x tende a meno infinito, y tende a più infinito; in simboli:

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$$

- se x assume valori sempre più grandi, il valore della y diventa sempre più piccolo (cioè vicino a zero); in termini più precisi, se x tende a più infinito, y tende a zero; in simboli:

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$$

- per $x = 0$, $y = 1$.
- $a = 1$ è ancora un caso banale in quanto $1^x = 1$ qualunque sia il valore della x;
- $a > 1$ è il caso analizzato in precedenza.

Studiamo ora delle applicazioni della funzione espressa più generalmente dalla relazione:

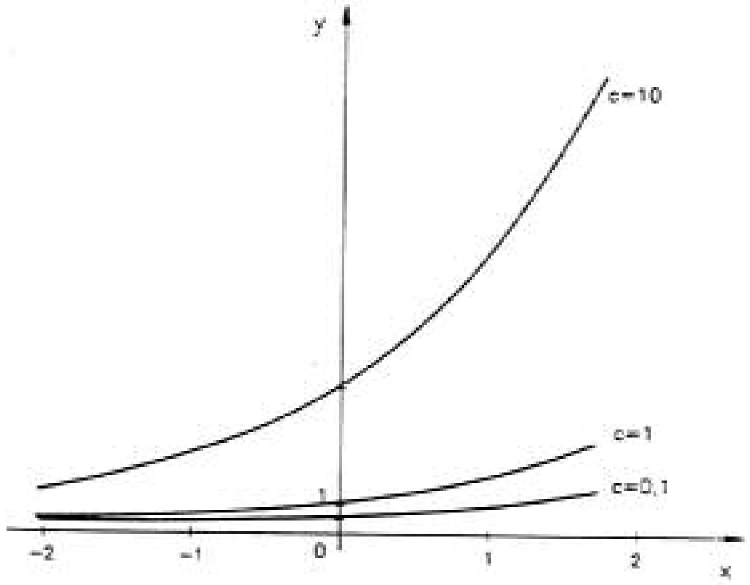
$$y = c \cdot a^x + b$$

con $x \neq 0$ e b qualsiasi.

Trascuriamo per il momento b, e osserviamo che la presenza di un fattore di moltiplicazione c (per il momento prendiamo $c > 0$) fa si che la funzione esponenziale, fissata la base a, risulti più o meno schiacciata contro l'asse y, a seconda del valore che assume c. Più precisamente, se $0 < c < 1$ la funzione è meno schiacciata, mentre lo è di più se $c > 1$.

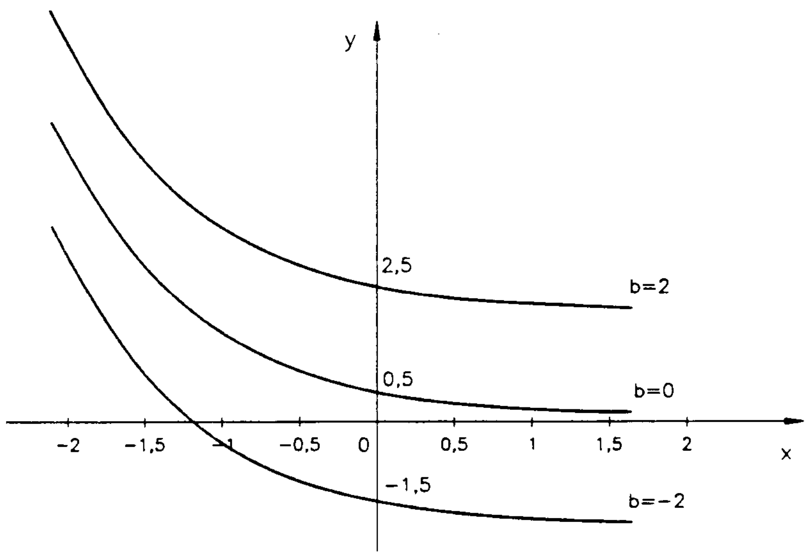
In figura sono riportati i grafici delle funzioni esponenziali

$$y = 0{,}1 \cdot 2^x, \quad y = 2^x \quad \text{e} \quad y = 10 \cdot 2^x$$



Si deduce inoltre che, se $c < 0$, il grafico della funzione è il simmetrico rispetto all'asse delle *x* del grafico della stessa funzione con c positivo. La presenza del termine b ha l'effetto di **traslare** il grafico della funzione parallelamente all'asse delle x, più in alto se $b > 0$, più basso se $b < 0$.
In figura sono riportati i grafici delle funzioni:

$$y = 0{,}5 \cdot (0{,}3)^x - 2, \quad y = 0{,}5 \cdot (0{,}3)^x \quad \text{e} \quad y = 0{,}5 \cdot (0{,}3)^x + 2$$



Come applicazioni in campo economico-finanziario studiamo:

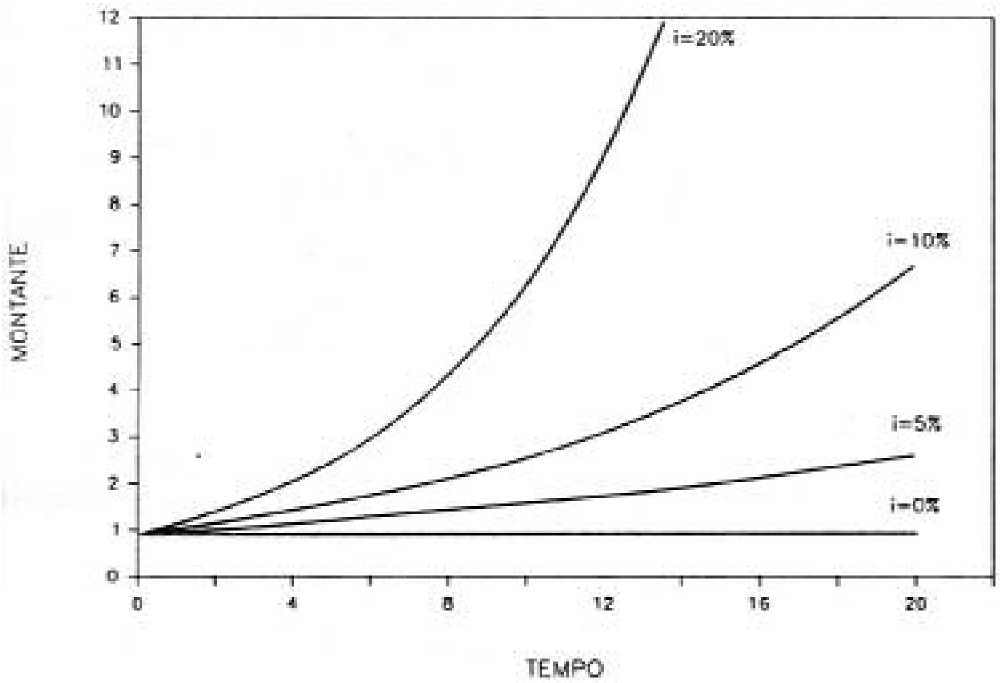
A) Montante in regime di capitalizzazione composta
B) Valore attuale in regime di capitalizzazione composta
C) Montante di una rendita

A) Montante in regime di capitalizzazione composta

In regime di capitalizzazione composta il montante di un capitale iniziale C_0 al tasso di interesse i per un tempo t è dato dalla relazione

$$M = C_0(1+i)^t \ .$$

Se si assegnano i valori di C_0 ed i, allora il montante è una funzione esponenziale del tempo il cui dominio è dato dai valori di t positivi. Essendo $i > 0$ risulta che la base dell'esponenziale è $1+i > 1$.



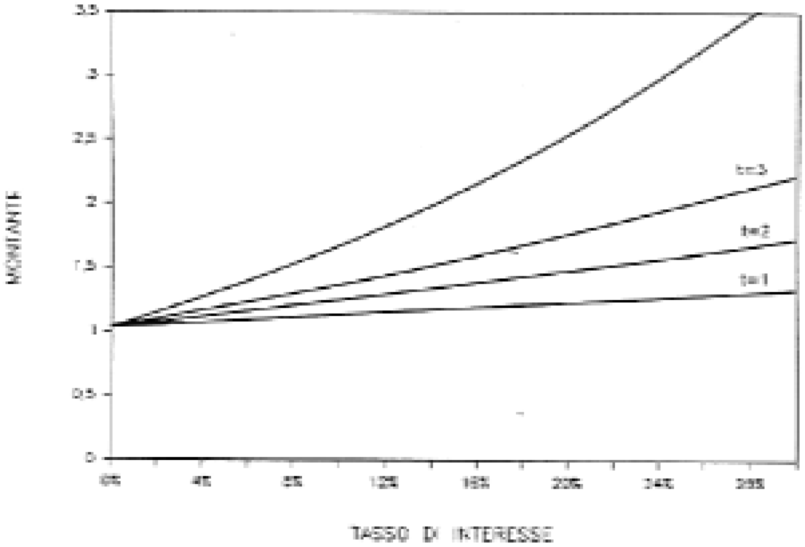
In figura è rappresentato il grafico della funzione, per diversi valori di i (0%, 5%, 10%, 20%), avendo posto $C_0 = 1$. Si nota che per ogni $i \geq 0$ e per ogni $t \geq 0$, risulta che il montante è maggiore o uguale ad 1..
Inoltre, fissato i, la funzione risulta crescente.
Il valore di i determina il grado di crescita della funzione, cioè, più i è grande, più il montante cresce rapidamente nel tempo.
Un altro modo interessante di vedere la funzione è quello di considerare i come variabile indipendente e t come parametro intero. Posto $C_0 = 1$ si ha:

per $t = 1$, $M = (1+i)$ il cui grafico è una retta;

per $t = 2$, $M = (1+i)^2 = i^2 + 2 \cdot i + 1$, il cui grafico è una parabola;

per $t \geq 3$, la funzione $M = (1+i)^t$ può essere sviluppata e tale sviluppo dà un polinomio di grado t.

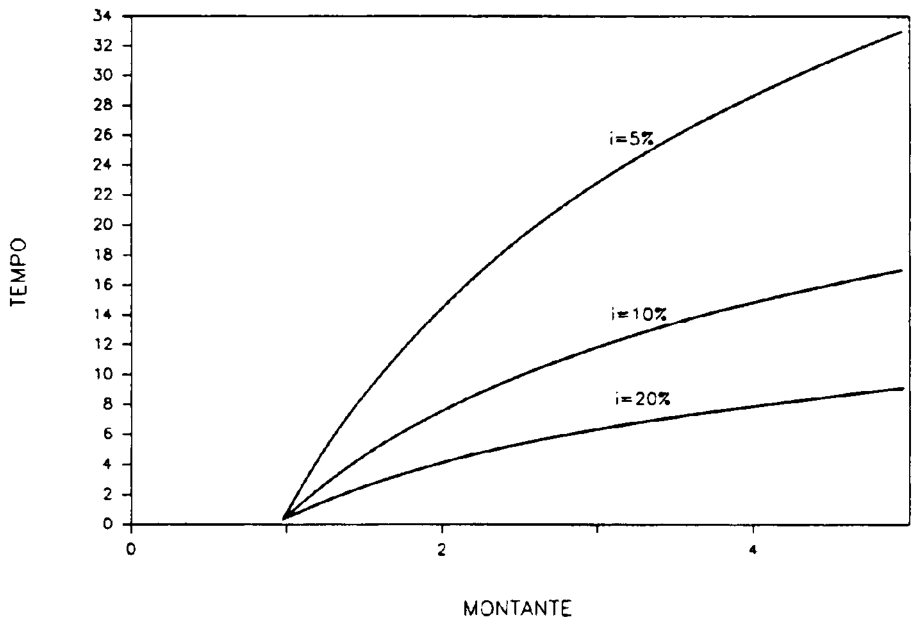
In figura.si ha il grafico per $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$, $t = 5$:



L'andamento esponenziale del fattore di montante a interesse composto $(1+i)^t$ esprime, in termini analitici, il fatto che l'interesse composto non è proporzionale al tempo ma cresce, al crescere di t, in maniera più che proporzionale.
Se la base è diversa da 1, la funzione esponenziale è invertibile. Da ciò, calcolando il logaritmo in base 10 dei due membri della relazione e per le proprietà del logaritmo, segue:

$$t = \frac{\log(M/C_0)}{\log(1+i)}.$$

Tale funzione, assegnati i valori per C_0 e per i, permette di calcolare il tempo in funzione del montante. In termini finanziari permette di sapere quanto tempo è necessario, fissato un capitale iniziale e un tasso di interesse i, per ottenere un dato montante. Osserviamo che mentre da un punto di vista matematico la funzione ha senso per $M/C_0 > 0$, se fosse per $0 < M/C_0 < 1$, cioè $M < C_0$, la funzione non avrebbe un senso finanziario. In figura è riportato il grafico di tale funzione avendo posto ancora una volta $C_0 = 1$, $M > C_0$; i valori del tasso i sono: 5%, 10%, 20%.



B) Valore attuale in regime di capitalizzazione composta

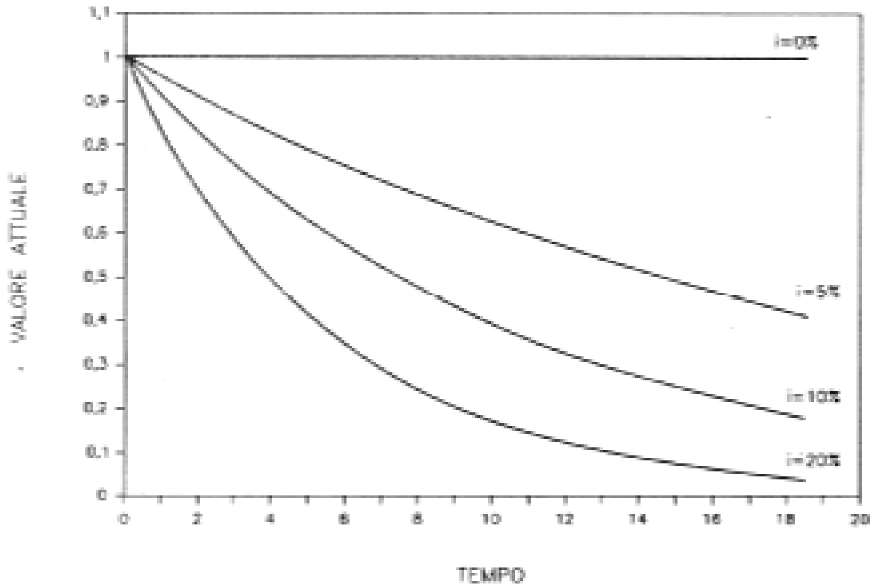
Il valore attuale in regime di capitalizzazione composta è dato dalla relazione

$$V = C \cdot (1+i)^{-t}$$

dove ***C*** è il capitale, ***i*** il tasso di interesse, ***t*** la durata.
Per le proprietà delle potenze,

$$(1+i)^{-t} = \left(\frac{1}{1+i}\right)^{t},$$

per cui, essendo $1+i>1$, risulta $0<1/(1+i)<1$. La funzione è quindi una funzione esponenziale del tempo con base compresa tra 0 e 1. In figura è rappresentato il grafico della funzione per diversi valori di ***i*** (0%, 5%, 10%, 20%), avendo posto $C=1$:



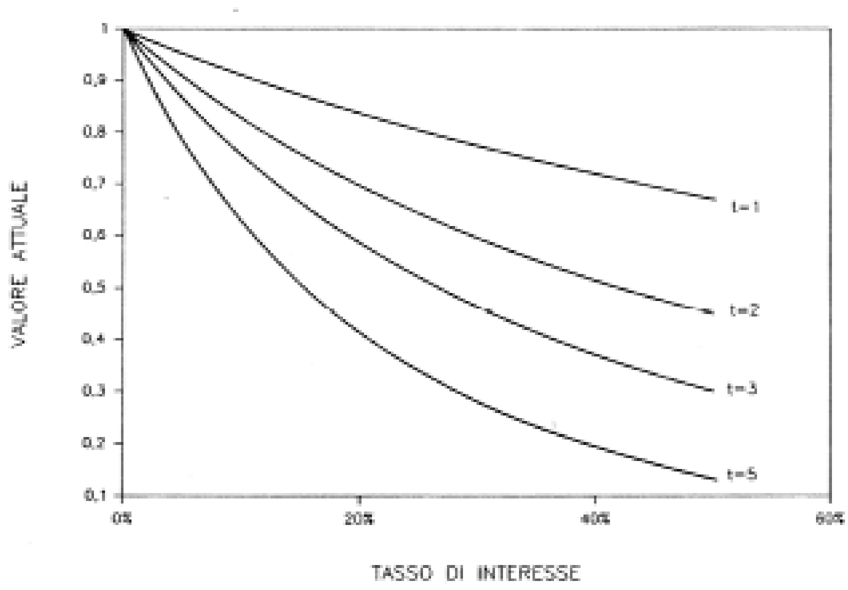
Si nota che per ogni $i \geq 0$ e per ogni $t \geq 0$ risulta che il valore attuale è minore o uguale ad 1. Inoltre, fissato ***i***, la funzione risulta decrescente. Come per il montante, un altro modo interessante di vedere la funzione è quello di considerare ***i*** come variabile indipendente e ***t*** come parametro intero. Posto $C=1$ si ha:

per $t=1$, $V=1/(1+i)$, il cui grafico è un'iperbole;

per $t=2$, $V=1/(1+i)^{-2}=\dfrac{1}{i^2+2\cdot i+1}$;

per $t \geq 3$, la funzione $V=(1+i)^{-t}$ può essere sviluppata e tale sviluppo dà una frazione in cui il numeratore è 1 e il denominatore è un polinomio di grado ***t***.

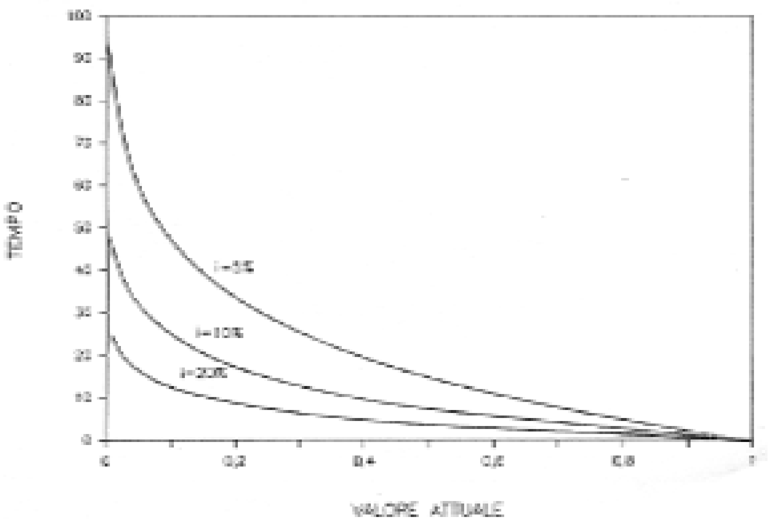
In figura si ha il grafico per $t=1$, $t=2$, $t=3$, $t=5$:



Se $i \neq 0$, allora la base dell'esponenziale è diversa da 1 e la funzione è invertibile. Da ciò calcolando il logaritmo in base 10 dei due membri della relazione e per le proprietà del logaritmo, segue:

$$t = -\frac{\log(V/C)}{\log(1+i)}.$$

Tale funzione, assegnati i valori per C e per i, permette di calcolare il tempo in funzione del valore attuale. In termini finanziari permette di sapere per quanto tempo è necessario scontare un capitale ad un tasso di interesse i per ottenere un dato valore attuale.
Osserviamo che mentre da un punto di vista matematico, la funzione ha senso per $V/C > 0$, se fosse $V/C > 1$, cioè $V > C$, la funzione non avrebbe un senso finanziario.
In figura è riportato il grafico di tale funzione avendo posto ancora una volta $C = 1$, $0 < V < C$; i valori del tasso sono: 5%, 10%, 20%.



Fissato un valore per ***i***, la funzione è decrescente, cioè al crescere del valore attuale, il tempo di impiego diminuisce. Inoltre, fissato un valore attuale, il tempo è minore per tassi di interesse maggiori (le curve corrispondenti a tassi di interesse maggiori si abbassano prima).

C) Montante di una rendita

Il montante di una rendita unitaria temporanea immediata posticipata si esprime mediante la relazione

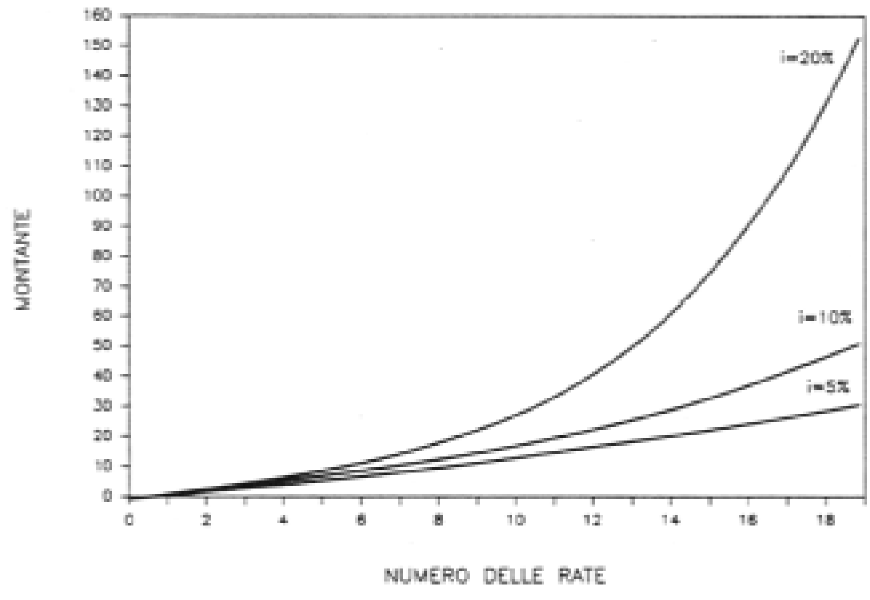
$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{(1+i)^n}{i} - \frac{1}{i},$$

dove ***i*** è il tasso di interesse e ***n*** il numero delle rate.
Il montante in funzione del numero delle rate è una funzione esponenziale, la cui forma generale è del tipo

$$y = c \cdot a^x + b$$

nella quale si è posto:

$$a = 1 + i > 1$$
$$b = -1/i$$
$$c = 1/i$$



In figura è riportato il grafico della funzione per diversi valori di ***i*** (5%, 10%, 20%).
Confrontando tale funzione con quella del montante unitario in regime di capitalizzazione composta, fissato un tasso di interesse (nella figura riportata a pagina 9, $i = 5\%$), si osserva che pur essendo entrambe funzioni crescenti del tempo, il montante di una rendita cresce più rapidamente. Ciò è dovuto alla presenza del fattore $1/i$ che è maggiore di 1. A pagina successiva viene riportata una tabella comparativa.

n	$s_{\overline{n}\rvert i}$	M
0	0,00000	1,00000
1	1,00000	1,05000
2	2,05000	1,10250
3	3,15250	1,15763
4	4,31013	1,21551
5	5,52563	1,27628
6	6,80191	1,34010
7	8,14201	1,40710
8	9,54911	1,47746
9	11,02656	1,55133
10	12,57789	1,62889
11	14,20679	1,71034
12	15,91713	1,79586
13	17,71298	1,88565
14	19,59863	1,97993
15	21,57856	2,07893