Analisi matematica

Calcolo combinatorio

Disposizioni semplici $D_{n,k}=n(n-1)(n-2).....(n-k+1)=\dfrac{n!}{(n-k)!}$ $(0\leq k \leq n)$ diff. Per un elemento o per l'ordine

con ripetizione $D^{r}_{n,k}=n^{k}$ $k\in N_0$ diff. Per due el. Dist. Che occupano lo stesso posto

Permutazioni semplici $P_n=D_{n,n}=n\,!$

elementi ripetuti $P_n^{(\alpha,\beta,\ldots)}=\dfrac{n!}{\alpha!\beta!\ldots}$

Combinazioni semplici $C_{n,k}=\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}=\dfrac{D_{n,k}}{P_k}$ diff. Per un elemento

con ripetizione $C'_{n,k}=\begin{pmatrix} n+k-1 \\ k \end{pmatrix}=\dfrac{(n+k-1)(n+k-2)\cdots(n+1)n}{k!}$

$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ $\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}=1$ $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}$

Stifel $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix}$ ricorrenza $\begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\dfrac{n-k}{k+1}$

Limiti

Per il calcolo dei limiti (x tende ad un numero finito o all'infinito), si utilizzano le formule seguenti quando sono noti i limiti finiti l e m. Noti: lim f(x)=l e lim g(x) = m

$\lim[f(x)\pm g(x)]=l\pm m$ $\lim\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\dfrac{l}{m}$ $(m\neq 0)$ $\lim[f(x)\cdot g(x)]=lm$ $\lim\ln(f(x))=\ln l$ $(l>0)$ $\lim e^{f(x)}=e^{l}$

Per $\log_a f(x)$ *usare*: $\log_a f(x)=\dfrac{\ln f(x)}{\ln a}$ *per* $a^{f(x)}$ *usare* $a^{f(x)}=e^{f(x)\ln a}$

Nei casi esclusi dalle regole precedenti o per limiti infiniti si possono applicare le seguenti *relazioni formali*.

Somma: $l\pm\infty=\pm\infty;\quad +\infty+\infty=+\infty;\quad -\infty-\infty=-\infty$

Prodotto: $l\cdot(\pm\infty)=\pm\infty\quad (l\neq 0);\quad (\pm\infty)\cdot(\pm\infty)=\pm\infty\,;$ Vale la regola dei segni.

Quoziente: $\dfrac{l}{0}=\infty\ (l\neq 0);\quad \dfrac{\infty}{0}=\infty\quad \dfrac{l}{\pm\infty}=0;\quad \dfrac{0}{\pm\infty}=0$

Esponenziale: $l>1\begin{cases} l^{(+\infty)}=+\infty \\ l^{(-\infty)}=0 \end{cases}$; $0<l<1\begin{cases} l^{(+\infty)}=0 \\ l^{(-\infty)}=+\infty \end{cases}$ $m>0\begin{cases} (+\infty)^{m}=+\infty \\ (+\infty)^{(+\infty)}=+\infty \\ 0^{+\infty}=0 \end{cases}$; $m<0\begin{cases} (+\infty)^{m}=0 \\ (+\infty)^{(-\infty)}=0 \\ 0^{(-\infty)}=+\infty \end{cases}$

Logaritmo: $\ln(0)=-\infty;\quad \ln(+\infty)=+\infty$

Per $\log_a f(x)$ *usare*: $\log_a f(x)=\dfrac{\ln f(x)}{\ln a}$ $\begin{cases} a>1\Rightarrow \ln a>0 \\ 0<a<1\Rightarrow \ln a<0 \end{cases}$

Limiti notevoli

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e;$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\alpha}{x}\right)^{x}=e^{\alpha};$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e;$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1;$ 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\alpha x)}{x}=\alpha$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x^{\beta}}=+\infty\,;$ 7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^{\alpha}x}{x^{\beta}}=0\,;$ 8) $\lim\limits_{x\to 0^{+}}x^{\beta}\cdot\ln^{\alpha}x=0\,;$ $(\forall\alpha\in\Re\, e\, \forall\beta>0);$ 8.1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x}-1}{x}=\ln a=\dfrac{1}{\log_a e}$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x}=1;$ 10) $\lim\limits_{f(x)\to 0}\dfrac{e^{f(x)}-1}{f(x)}=1;$ 11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e=\dfrac{1}{\ln a};$ $a\in\Re^{+}-\{1\};$ 12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{k}-1}{x}=k;$ $k\in\Re$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}=1;$ 14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}ax}{ax}=1$ $(a\neq 0);$ 15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1;$ 16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=1;$ 17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^{2}x}{x^{2}}=\dfrac{1}{2}$

18) $\lim\limits_{x\to 0} x\,\mathrm{sen}\frac{1}{x}=0 \quad \left(poichè \left|x\,\mathrm{sen}\frac{1}{x}\right|<|x|\right)$; 19) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\,\mathrm{sen}^2\frac{\pi}{x}=0 \quad \left(0\le x^2\,\mathrm{sen}^2\frac{\pi}{x}\le x^2\right)$; 20) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}=\frac{\pi}{180} \quad (x \text{ in gradi})$

Forme indeterminate

1,2) $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$ si applica la formula di De L'Hopital $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Per le funzioni razionali fratte con $\begin{cases} numeratore\ di\ grado\ n \\ denominatore\ di\ grado\ d \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{ax^n+...}{bx^d+...}=\begin{cases}\infty & per\ n>d \\ \frac{a}{b} & per\ n=d \\ 0 & per\ n<d\end{cases}$

3) $0\cdot\infty$ Si riconduce al caso $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ $\Rightarrow f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ oppure $f(x)\cdot g(x)=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$

4,5,6) 0^0; ∞^0; 1^∞ Si trasforma usando

$\lim[g(x)\ln f(x)]=l$ $(forma\ ind.\ 0\cdot\infty)$; $\Rightarrow \lim f(x)^{g(x)}=\lim e^{g(x)\ln f(x)}=e^l$ $(l \text{ anche } +\infty,-\infty)$

7) $\infty-\infty$ Si riporta ad uno dei precedenti casi:

$$\lim\frac{g(x)}{f(x)}=l\Rightarrow f(x)-g(x)=\frac{1-\frac{g(x)}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}}\left(forma\ ind.\frac{0}{0}\right) se\ l=1 \qquad oppure \quad f(x)-g(x)=f(x)\left(1-\frac{g(x)}{f(x)}\right)$$

Se ci sono radicali si può razionalizzare: si moltiplica e si divide per lo stesso fattore, che elimina la differenza (o somma) fra radicali; ad es. se la funzione è del tipo $\sqrt{\ }\pm\sqrt{\ }$, si moltiplica e si divide per $\sqrt{\ }\mp\sqrt{\ }$

Derivate

y = c	y' = 0	y = logx = lnx	$y'=\frac{1}{x}$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	$y = a^x$	$y' = a^x \log a$
y = senx	y' = cosx	$y = e^x$	$y' = e^x$
y = cosx	y' = -senx	y = arc senx	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
y = tgx	$y'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+tg^2x$	y = arc cosx	$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
y = ctgx	$y'=-\frac{1}{\mathrm{sen}^2 x}=-(1+ctg^2x)$	y = arc tgx	$y'=\frac{1}{1+x^2}$
$y=\sqrt{x}$	$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	y = arc cotgx	$y'=-\frac{1}{1+x^2}$
$y=\sqrt[n]{x}$	$y'=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y=[f(x)]^{g(x)}$	$y'=[f(x)]^{g(x)}\left\{g'(x)\log f(x)+g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right\}$
$y = \log_a x$	$y'=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}$		

Funzione potenza

$Dc=0$ $\qquad Dx^n=nx^{n-1}$ $\qquad Dx=1$ $\qquad D|x|=\mathrm{sgn}\,x=\frac{x}{|x|}$

$D\sqrt[n]{x}=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ $\qquad D\frac{1}{x}=-\frac{1}{x^2}$ $\qquad D\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Funzioni goniometriche $\qquad D\sin x=\cos x$ $\qquad D\cos x=-\sin x$

$Dtgx=\frac{1}{\cos^2 x}=1+tg^2x$ $\qquad Dctgx=-\frac{1}{\mathrm{sen}^2 x}=-(1+ctg^2x)$

Funzione logaritmica $\qquad D\log_a x=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}$ $\qquad D\ln x=\frac{1}{x}$

Funzione esponenziale $Da^x = a^x \ln a$ $De^x = e^x$

Inverse delle funzioni goniometriche

$D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $D \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $D \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}$ $D \operatorname{arctg} x = -\frac{1}{1+x^2}$

Regole di derivazione

$Dkf(x) = kf'(x)$ $D[f(x)+g(x)] = f'(x)+g'(x)$ $D[f(x)\cdot g(x)] = f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$

$$D\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)\cdot g(x) - g'(x)\cdot f(x)}{[g(x)]^2} \qquad Df[g(x)] = f'[g(x)]g'(x)$$

$$D[f(x)]^{g(x)} = [f(x)]^{g(x)}\left\{g'(x)\log f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right\} \qquad D\ln|x| = \frac{1}{x} \qquad D[f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1}\cdot f'(x)$$

$$Da^{f(x)} = a^{f(x)}\cdot \ln a \cdot f'(x) \qquad De^{f(x)} = e^{f(x)}\cdot f'(x) \qquad D\ln|f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Studio di funzione

Affinché una **funzione** y = f(x) sia **continua** nel punto x = c devono verificarsi contemporaneamente le seguenti condizioni:

1) esistenza del valore della funzione per x = c;
2) esistenza del limite finito l della funzione per x $\rightarrow$ c (cioè $\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = l$);
3) coincidenza tra l e f(c).

Quando anche una sola delle tre condizioni non è verificata si dice che la funzione è **discontinua** e che x = c è un **punto** di **discontinuità** per la funzione (o anche *punto singolare*).

Punti di discontinuità di prima specie

Si dice che per x=c la funzione y = f(x) ha un punto di **discontinuità** di **prima specie**, quando *esistono* e sono *finiti e diversi tra loro i limiti dalla destra e dalla sinistra* della funzione, a prescindere dall'eventuale valore della f(x) per x = c $\lim_{x\to c^-} f(x) \neq \lim_{x\to c^+} f(x)$

Punti di discontinuità di seconda specie

Si dice che per x=c la funzione y = f(x) ha un punto di **discontinuità** di **seconda specie**, quando *non esiste*, o *non esiste finito, uno almeno dei due limiti dalla destra o dalla sinistra* di c.

Punti di discontinuità di terza specie

Si dice che per x=c la funzione y = f(x) ha un punto di **discontinuità** di **terza specie** o **eliminabile**, quando **esiste finito**, il limite per x $\rightarrow$ c di f(x), ma f(c) o non esiste o è diversa dal valore del limite.

Grafico probabile di una funzione

a) determinare il dominio individuando dove f è continua
b) determinare le eventuali intersezioni del suo grafico con gli assi coordinati
c) studiare il segno della funzione individuando l'insieme di positività e negatività
d) calcolare i limiti della funzione per x $\rightarrow \infty$ e in corrispondenza ai suoi punti di discontinuità, deducendo gli eventuali asintoti orizzontali e verticali
e) tracciare, tenendo conto degli elementi acquisiti, il grafico probabile della funzione.

Flessi a tg. orizzontale

Ricerco la 1ª derivata $\neq 0$

$f'(x_1)$	$f''(x_1)$	$f'''(x_1)$	$f^{iV}(x_1)$ ordine pari	$f^{V}(x_1)$ ord. dispari
=0	>0 min <0 max			
=0	=0	>0 fl. asc. <0 fl. disc.		
=0	=0	=0	>0 min <0 max	
=0	=0	=0	=0	>0 fl. asc. <0 fl. disc.

Per ricercare tutti i flessi anche quelli a tg. Obliqua

$f''(x) = 0$ (condizione necessaria non sufficiente)

$f'(x_1)$	$f''(x_1)$	$f'''(x_1)$ ordine dispari	$f^{IV}(x_1)$ ordine pari
$\neq 0$	= 0	$\neq 0$ fl. obliq.	
$\neq 0$	= 0	=0	$\neq 0$ ne min. ne max. ne flessi. la curva volge la concavità verso l'alto > 0 la curva volge la concavità verso il basso < 0

$f'(x_i) > 0$ ➔ funz.crescente
$f'(x_i) < 0$ ➔ funz decrescente

$f''(x_i) > 0$ ➔ concavità verso l'alto
$f''(x_i) < 0$ ➔ concavità verso il basso

per trovare i flessi si pone f''(x) = 0 , si studia il segno di f''(x) nell'intorno dei valori trovati, se f''(x) cambia segno tra destra e sinistra del punto considerato si ha un flesso altrimenti no.

Se si ha un max o un min a tg orizzontale ➔ $f'(x_0) = 0$

Condizione necessaria, non sufficiente, affinchè vi sia un flesso in x_0 è che $f''(x_0)=0$

Per trovare i flessi perciò si deve porre f''(x)=0

Si studia quindi il segno della f''(x) nell'intorno dei valori trovati

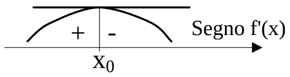
Se f''(x) cambia di segno a destra e a sinistra del punto considerato si ha un flesso altrimenti no.

Se $f'(x_0) > 0$ → funzione crescente in x_0
Se $f'(x_0) < 0$ → funzione decrescente in x_0

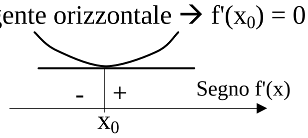
Se $f''(x_0) > 0$ → concavità verso l'alto
Se $f''(x_0) < 0$ → concavità verso il basso

Massimi e minimi: se si ha un massimo o minimo relativo a tangente orizzontale → $f'(x_0) = 0$

Massimo relativo



Minimo relativo



<u>Tabella delle primitive</u>

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c, \quad (n \neq -1)$$

$$\int dx = x + c \qquad \int x dx = \frac{1}{2}x^2 + c \qquad \int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^2} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + c$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int \text{sen } x dx = -\cos x + c \qquad \int \text{sen } ax dx = -\frac{1}{a}\cos ax + c$$

$$\int \cos x dx = \text{sen } x + c \qquad \int \cos ax dx = \frac{1}{a}\text{sen } ax + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + c$$

$$\int \frac{1}{\text{sen}^2 x} dx = -ctgx + c$$

$$\int tgx dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$\int \cot g\, x dx = \ln|\text{sen } x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{arcsen } x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \text{arctg } x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \text{arcsen } \frac{x}{|a|} + c$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a}\text{arctg } \frac{x}{a} + c, \quad (a \neq 0)$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \sqrt{x^2 + a} + c$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a - x^2}} dx = -\sqrt{a - x^2} + c. \quad (a > 0)$$

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\text{sen } x} dx = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + c = \ln|\cos ecx - ctgx| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + c = \ln|\sec x + tgx| + c$$

$$\int \text{sen}^2 x dx = \frac{1}{2}(x - \text{sen } x \cos x) + c$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}(x + \text{sen } x \cos x) + c$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2}\left(a^2 \text{ arcsen } \frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2}\right) + c$$