GEOMETRIA ANALITICA : FORMULARIO

Punto medio d'un segmento $\left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}\right)$

Distanza tra due punti $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Condizione di appartenenza di un punto P $(x_p;y_p)$ ad una curva di equazione $f(x,y) = g(x,y)$
il punto appartiene alla curva se, sostituendo nell' equazione i valori $x_p;y_p$ alle variabili x,y l'equazione risulta un'identità, ovvero

$$f(x_p;y_p) = g(x_p;y_p)$$

Punti comuni di due curve: i punti comuni delle due curve di equazioni $f(x,y) = g(x,y)$ e $F(x,y) = G(x,y)$ hanno come coordinate le soluzioni del sistema delle due equazioni

$$\begin{cases} f(x,y) = g(x,y) \\ F(x,y) = G(x,y) \end{cases}$$

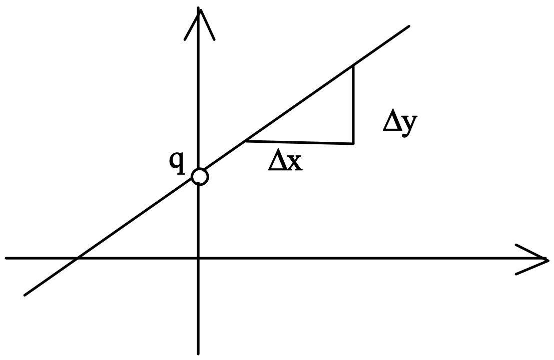
## RETTA

Equazione della retta
- in forma esplicita $y = mx + q$
- in forma implicita $ax + by + c = 0$

Rette particolari:

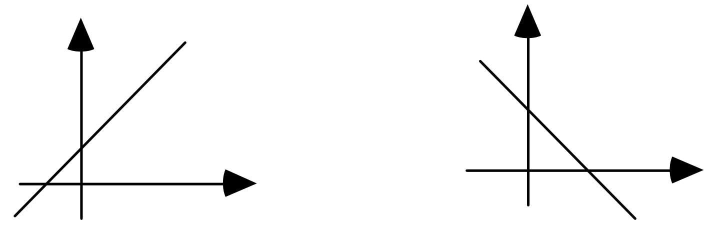
| | |
|---|---|
| retta parallela all'asse delle x | $y = \text{cost.}$ |
| retta parallela all'asse delle y | $x = \text{cost.}$ |
| asse delle x | $y = 0$ |
| asse delle y | $x = 0$ |
| bisettrice del primo e del terzo quadrante | $y = x$ |
| bisettrice del secondo e del quarto quadrante | $y = - x$ |
| retta passante per l'origine | $y = mx$ |

Significato geometrico di m (coefficiente angolare) e di q:




$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

m positivo m negativo



coefficiente angolare di una retta passante per due punti dati $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

retta passante per due punti dati $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

Fascio proprio di rette di centro $C(x_c ; y_c)$ : $y - y_c = m(x - x_c)$

Fascio proprio di rette di cui siano date le equazioni di due rette appartenenti al fascio:

si pongono le due equazioni in forma implicita

$ax + by + c = 0$

$Ax + By + C = 0$

l'equazione del fascio è

$\lambda(ax + by + c) + \mu(Ax + By + C) = 0$

Siano date due rette $r: y = m_1 x + q_1$

$s: y = m_2 x + q_2$

- Criterio di parallelismo : r ed s sono parallele se e solo se $m_1 = m_2$
- Criterio di perpendicolarità : r ed s sono perpendicolari se e solo se $m_1 = -\frac{1}{m_2}$

Distanza tra un punto $P(x_p ; y_p)$ ed una retta r

si pone innanzitutto l'equazione della retta in forma implicita : $ax + by + c = 0$

dopodichè la distanza è : $d = \frac{|ax_p + by_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

# CIRCONFERENZA

Equazione di una circonferenza di centro C $( x_c \ ; y_c )$ e raggio R

1) $$( x - x_c )^2 + ( y - y_c )^2 = R^2$$

oppure

2) $$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

(ATTENZIONE ! L'equazione 2) rappresenta una circonferenza solo se $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c \geq 0$ )

I coefficienti delle due equazioni sono tra loro legati dalle seguenti relazioni

$$\begin{cases} a = -2\, x_c \\ b = -2\, y_c \\ \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c = R^2 \end{cases}$$

Intersezione tra due circonferenze: si pongono le due equazioni nella forma 2) (v. sopra) e si risolve il sistema delle due equazioni

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \end{cases}$$

Come si vede è un sistema di quarto grado che va risolto con un qualche trucco ad hoc: si sottrae membro a membro una equazione dall'altra ( metodo di riduzione). Risulta una equazione di primo grado

$$( a - A )\, x + ( b - B )\, y + ( c - C ) = 0$$

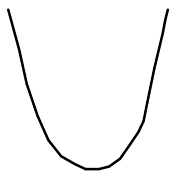
che rappresenta la retta che passa per i due punti comuni (se ci sono ) alle circonferenze: questa retta si chiama asse radicale. A questo punto si pongono in sistema l'equazione della retta e quella di una delle due circonferenze (a scelta, quella più semplice) e si risolve il sistema che ora è di secondo grado.

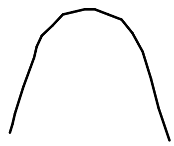
PARABOLA

PARABOLA con asse parallelo all'asse delle y

Equazione in forma esplicita: $y = ax^2 + bx + c$

$a > 0 \Rightarrow$ concavità rivolta verso l'alto $a < 0 \Rightarrow$ concavità rivolta verso il basso





Vertice $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

Fuoco $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta + 1}{4a}\right)$

Equazione dell'asse di simmetria $x = -\frac{b}{2a}$

Equazione della direttrice $y = \frac{-\Delta - 1}{4a}$

Intersezione con l'asse delle y $(0, c)$

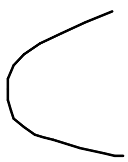
Intersezioni con l'asse delle x (se ci sono) -> (soluzioni dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ , 0 )

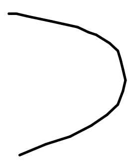
PARABOLA con asse parallelo all'asse delle x

Valgono tutte le formule del caso precedente in cui la x e la y vengono scambiate

Equazione in forma esplicita: $x = ay^2 + by + c$

$a > 0 \Rightarrow$ concavità rivolta verso destra $a < 0 \Rightarrow$ concavità rivolta verso sinistra





Vertice $\left(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$

Fuoco $\left(\frac{-\Delta + 1}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$

Equazione dell'asse di simmetria $y = -\frac{b}{2a}$

Equazione della direttrice $x = \frac{-\Delta - 1}{4a}$

Intersezione con l'asse delle x $(c, 0)$

Intersezioni con l'asse delle x (se ci sono) -> (soluzioni dell'equazione $ay^2 + by + c = 0$ , 0)

ELLISSE

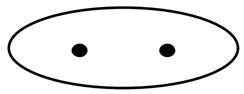
( <u>ELLISSE CON ASSI PARALLELI AGLI ASSI CARTESIANI</u> )

1) <u>Ellisse con centro nell'origine</u>

Equazione in forma canonica : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

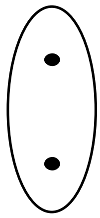
Lunghezza del semiasse sull'asse delle x : a
Lunghezza del semiasse sull'asse delle y : b
Semidistanza focale : c
se a = b allora l'ellisse è una circonferenza

$a > b$



$c^2 = a^2 - b^2$

$a < b$



$c^2 = b^2 - a^2$

2) <u>Ellisse con centro nel punto C ( $x_c$ ; $y_c$ )</u>

Equazione in forma canonica : $\frac{(x-x_c)^2}{a^2} + \frac{(y-y_c)^2}{b^2} = 1$

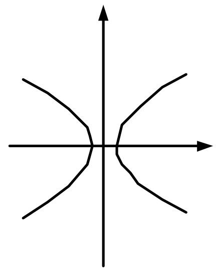
<u>IPERBOLE RIFERITA AI PROPRI ASSI</u>

1) Con centro nell'origine

Equazione in forma canonica :

1)

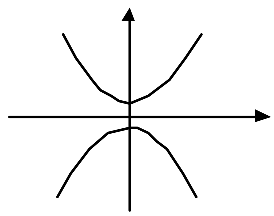
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



oppure

2)

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Semiasse trasverso : a
Semiasse non trasverso : b
Semidistanza focale : c

$$c^2 = a^2 + b^2$$

equazioni degli asintoti : $y = \pm \frac{b}{a} x$

se a = b allora l'iperbole si dice equilatera ed i suoi asintoti sono tra loro perpendicolari

2) Con centro nel punto C ( $x_c$ ; $y_c$ )

Equazione in forma canonica : $\frac{(x - x_c)^2}{a^2} - \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1$

oppure $-\frac{(x - x_c)^2}{a^2} + \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1$

## IPERBOLE RIFERITA AI PROPRI ASINTOTI

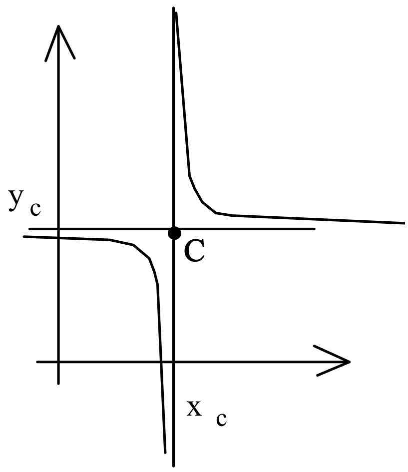
(Attenzione! Si può riferire un'iperbole ai propri asintoti solo se è equilatera)

Equazione $xy = k$ oppure $y = \frac{k}{x}$

$k > 0$ $\qquad\qquad$ $k < 0$

Vertici : intersezioni tra l'iperbole e le bisettrici dei quadranti.

## IPERBOLE RIFERITA AD ASSI PARALLELI AI PROPRI ASINTOTI
## ( FUNZIONE OMOGRAFICA )




Equazione: $y = \frac{a\,x + b}{c\,x + d}$

Attenzione! I valori di (a,b,c,d) determinano l'iperbole in maniera univoca ma non viceversa:

$$y = \frac{3\,x + 2}{x - 4} \qquad\qquad y = \frac{6\,x + 4}{2\,x - 8} \qquad\qquad y = \frac{\frac{3}{2}x + 1}{\frac{1}{2}x - 2}$$

hanno coefficienti diversi ma rappresentano la stessa iperbole (il perchè è ovvio ... o forse no ... pensateci)

Coordinate del centro di simmetria: $x_c = -\frac{d}{c}$ ; $y_c = \frac{a}{c}$