EQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL SECONDO

Teorema fondamentale dell'algebra

Il teorema fondamentale dell'algebra dice che:

Un'equazione di grado n ammette sempre n soluzioni reali distinte, reali coincidenti o complesse e coniugate.

Una cosa e' sapere che le soluzioni ci sono ed un'altra e' trovarle: infatti finora si sanno risolvere equazioni fino al quarto grado mentre per i gradi superiori qualche volta si possono trovare le soluzioni ma non e' stato ancora trovato un metodo generale .

Equazioni di grado superiore al secondo riconducibili ad equazioni di grado inferiore (1° o 2°) mediante scomposizione

Data l'equazione A(x) = 0, con A(x) un polinomio di grado n in x, possiamo vedere se A(x) è scomponibile in fattori di grado inferiore; ogni fattore deve poi essere uguagliato a 0 (applicando la legge di annullamento del prodotto) e si devono risolvere le equazioni così ottenute.

$$es\,1 \quad x^3-2x^2-x+2=0 \rightarrow x^2(x-2)-(x-2)=0 \; racc\ parziale$$

$$\rightarrow (x^2-1)(x-2)=0 \begin{array}{l} \rightarrow x^2-1=0 \; eq\ completa\ pura \rightarrow x=\pm 1 \\ \rightarrow x-2=0 \; eq\ di\ primo\ grado \rightarrow x=2 \end{array}$$

$$es\,2 \quad 3x^5-27x=0 \rightarrow 3x(x^4-9)=0 \rightarrow 3x(x^2-3)(x^2+3)=0$$

$$\begin{array}{ll} da\ cui\ ottengo & 3x=0 \rightarrow x=0 \\ & x^2-3=0 \rightarrow x=\pm\sqrt{3} \; eq.incompleta\ pura \\ & x^2+3=0 \rightarrow imp\ in\ R \end{array}$$

$$es\,3 \quad x^4-16=0 \rightarrow (x^2-4)(x^2+4)=0 \begin{array}{l} \rightarrow x^2-4=0 \rightarrow x=\pm 2 \\ \rightarrow x^2+4=0 \rightarrow imp\ in\ R \end{array}$$

$$Esercizi: \quad 36x^6-2x^2=0 \quad \left[0,0,\pm\frac{1}{2}\right] \qquad x^3-9x^2-4x+36=0 \quad [\pm 2,9]$$

$$9x^3-7x+2=0 \quad \left[-1,\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right] \quad scomporre\ con\ Ruffini$$

Equazioni binomie

Una **equazione binomia di grado n** (n intero) è una equazione semplificabile nella forma

$ax^n + b = 0$ con $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

[Se b=0 le *n* soluzioni della equazione monomia $ax^n = 0$ sono tutte nulle e si hanno *n* soluzioni x=0]

Se **n è dispari**, una soluzione reale si ottiene **isolando la variabile ed estraendo la radice n-sima del secondo membro**

$ax^n + b = 0$

$x^n = -\frac{b}{a}$ $\qquad$ $x = -\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$

Esempio:

$2x^3 - 54 = 0$ $\qquad$ $x^3 = \frac{54}{2} = 27$ $\qquad$ $x = \sqrt[3]{27} = 3$

Se **n è pari**, due soluzioni reale o due soluzioni complesse coniugate si ottengono isolando la variabile ed **estraendo la radice n-sima del secondo membro**

$ax^n + b = 0$ $\qquad$ $x^n = -\frac{b}{a}$ $\qquad$ $x = \pm\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$

Esempio:

3x4 – 48 = 0 $\qquad$ x4 = $\frac{48}{3}$ =16 $\qquad$ $x = \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2$

Equazioni trinomie

Una equazione **trinomia di grado 2*n*** (*n* intero) è una equazione semplificabile nella forma

$ax^{2n} + bx^n + c = 0$

con $a \neq 0$ e $b \neq 0$.[Se a=0 oppure b=0 l’equazione decade nel caso precedente e diventa binomia]

Attenzione: le potenze della x devono essere **una il doppio dell’altra**

Si risolve sostituendo la variabile; ponendo per esempio **$x^n = z$**, l’equazione data si trasforma nella equazione di secondo grado

$$az^2 + bz + c= 0$$

che viene risolta come equazione di secondo grado nel solito modo. Trovate le due soluzioni z_1 e z_2 , esse vengono risostituite al posto di z in $x^n = z$, ottenendo così due equazioni binomie pronte per la soluzione finale.

$$x^n = z_1 \quad , \quad x^n = z_2 \qquad\qquad x = \sqrt[n]{z_1}\ ;\ x = \sqrt[n]{z_2}$$

Esempio1:

2x6 – 18x3 + 16= 0

posto $z=x^3$ si ottiene

$$2z^2 - 18z + 16= 0$$

risolviamo con la formula, e si ottiene $z_1=8$ e $z_2 =1$. Abbiamo così le equazioni binomie

$x^3= 8$ e $x^3 = 1$

da cui ricaviamo le soluzioni reali

$x= \sqrt[3]{8} = 2$ e $x= \sqrt[3]{1} = 1$

Equazioni biquadratiche

Una forma speciale della equazione trinomia di **grado 4** si chiama **equazione biquadratica** ed è semplificabile nella forma

$$ax^4 + bx^2 + c= 0$$

con $a\neq0$ e $b\neq0$.

attenzione: le potenze della x devono essere **4** e **2**

Questa equazione si risolve sostituendo la variabile; ponendo per esempio $x^2 = z$, l'equazione data si trasforma nella equazione di secondo grado

$$az^2 + bz + c= 0$$

che viene risolta nel solito modo. Trovate le due soluzioni z_1 e z_2 , esse vengono risostituite al posto di z in

$$x^2 = z,$$

ottenendo così due equazioni pure di secondo grado pronte per la soluzione finale.

$$x^2 = z_1,\ x^2 = z_2\ ; \qquad \text{ovvero:} \quad x= \pm\sqrt{z_1}\ ;\quad x = \pm\sqrt{z_2}$$

Esempio1: $2x^4 - 20x^2 + 18 = 0$

posto $z=x^2$ si ottiene

$2z^2 - 20z + 18 = 0$

risolviamo con la formula

$$z_1 = = \frac{20+\sqrt{400-144}}{4} = 9; \qquad z_2 = = \frac{20-\sqrt{400-144}}{4} = 1.$$

Abbiamo così le equazioni pure

$x^2 = 9$ e $x^2 = 1$

da cui ricaviamo le soluzioni reali

$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$ e $x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

Equazioni reciproche

Sono equazioni caratterizzate dal fatto che per ogni soluzione esiste sempre come soluzione anche la sua reciproca (senza considerare il segno)
cioè se ho soluzione $x = 2/3$ avrò come soluzione anche $x = 3/2$ oppure $x = -3/2$
Si riconoscono per il fatto che, considerando il polinomio associato, i coefficienti equidistanti dal centro del polinomio sono uguali come modulo (possono anche avere segni contrari)

Le chiameremo di prima specie se i segni dei termini equidistanti sono uguali, di seconda specie se i segni sono diversi;
per fare un esempio pratico le seguenti sono equazioni reciproche
$2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$ di prima specie
$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$ di seconda specie
$2x^5 - 5x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = 0$ di seconda specie

dividiamole per tipi secondo il grado dell'equazione (per quelle di secondo grado useremo la normale formula risolutiva)

- di terzo grado
- di quarto grado

Equazioni reciproche di terzo grado

$\mathbf{ax^3 + bx^2 + bx + a = 0}$ prima specie
$\mathbf{ax^3 + bx^2 - bx - a = 0}$ seconda specie

Come prima cosa c'e' da dire che se l'equazione reciproca e' di grado dispari, siccome ogni soluzione deve avere la sua reciproca e, per il teorema fondamentale dell'algebra le soluzioni sono in numero dispari allora (intuitivamente) tra le soluzioni dovrà sempre esservi 1 (o -1) come numero reciproco di sé stesso
in particolare per le equazioni reciproche di prima specie -1
per le equazioni reciproche di seconda specie +1
Pertanto potremo sempre usare Ruffini con il divisore
$x = -1$ per le equazioni di prima specie
$x = +1$ per le equazioni di seconda specie

Vediamo un esempio per tipo:

Equazione reciproca di prima specie
$3x^3 + 13 x^2 + 13 x + 3 = 0$
E' reciproca di prima specie perche i coefficienti equidistanti dal centro dell'equazione sono uguali e di stesso segno
3 con 3 e 13 con 13
posso scomporre per (x+1): infatti
$P(-1)= 3(-1)^3 + 13 (-1)^2 + 13(-1) + 3 =$
$= 3(-1) + 13(1) + 13(-1) + 3 =$
$= - 3 + 13 - 13 + 3 = 0$
quindi faccio la divisione di Ruffini

	3	13	13	3
-1		-3	-10	-3
	3	10	3	0

quindi ottengo
$3x^3 + 13 x^2 + 13 x + 3 = (x + 1) (3x^2 + 10x + 3)$ adesso pongo uguali a zero i fattori ed ottengo

- primo fattore
  $x + 1 = 0$ cioè $x = -1$
- secondo fattore
  $3x^2 + 10x + 3 = 0$

  che mi da' come soluzioni (risolvendo come una normale equazione di II grado)
  $x = 3$ $x = 1/3$

Ottengo quindi le tre soluzioni (Ordinate)
$x_1 = - 1$ $x_2 = 1/3$ $x_3 = 3$

Equazione reciproca di seconda specie
2x3 - 7x2 + 7x - 2 = 0
E' reciproca di seconda specie perché i coefficienti equidistanti dal centro dell'equazione sono uguali e di segno contrario
2 con -2 e -7 con 7
posso scomporre per (x-1): infatti
$P(1)= 2(1)^3 - 7(1)^2 + 7(1) - 2 = 2 - 7 + 7 - 2 = 0$
quindi faccio la divisione di Ruffini

	2	-7	7	-2
1		2	-5	2
	2	-5	2	0

quindi ottengo
$2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = (x - 1)(2x^2 - 5x + 2)$
adesso pongo uguali a zero i fattori ed ottengo

- primo fattore
  $x - 1 = 0$ cioè $x = 1$
- secondo fattore (risolvendo come una normale equazione di II grado)
  $x^2 - 5x + 2 = 0$
  $x = 2$ $x = 1/2$

Ottengo quindi le tre soluzioni (ordinate)
$x_1 = 1/2$ $x_2 = 1$ $x_3 = 2$

Equazioni reciproche di quarto grado

abbiamo due tipi diversi

- $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ di prima specie
- $ax^4 + bx^3 - bx - a = 0$ di seconda specie

Noi risolveremo solo quelle di II specie, cioè quelle del tipo:

$\mathbf{ax^4 + bx^3 - bx - a = 0}$

Il polinomio associato e' sempre scomponibile per $(x-1)(x+1)$; ovvero e' possibile scomporre il polinomio utilizzando la scomposizione di Ruffini con i divisori **x = +1** e **x = -1**, ottenendo come quoziente un'equazione di secondo grado.

Vediamolo meglio con un esempio:

Risolvere l'equazione
$3x^4 - 10x^3 + 10x - 3 = 0$
considero il polinomio associato $3x^4 - 10x^3 + 10x - 3$ e scompongo per $(x-1)$:
faccio subito la divisione di Ruffini ricordandomi di ordinare perche' manca il termine in x^2

	3	-10	//	10	-3
1		3	-7	-7	3
	3	-7	-7	3	0

ottengo:
$3x^4 - 10x^3 + 10x - 3 = (x - 1)(3x^3 - 7x^2 - 7x + 3)=$
ora continuo a scomporre per (x+1): faccio subito la divisione di Ruffini

	3	-7	-7	3
-1		-3	10	-3
	3	-10	3	0

quindi ho
$3x^4 - 10x^3 + 10x - 3 = (x - 1)(3x^3 - 7x^2 - 7x + 3)= (x-1)(x+1)(3x^2 - 10x + 3)$
devo risolvere
$(x-1)(x+1)(3x^2 - 10x + 3) = 0$
pongo ogni fattore uguale a zero

- $x - 1 = 0$ ottengo $x = 1$
- $x + 1 = 0$ ottengo $x = -1$
- $3x^2 - 10x + 3 = 0$
  ha come soluzioni (risolvendo come una normale equazione di II grado)

  $x_1 = \frac{1}{3}$ $\quad$ $x_2 = 3$

quindi le soluzioni dell'equazione di partenza sono (ordinate)

$x_1 = -1 \quad x_2 = \frac{1}{3} \quad x_3 = 1 \quad x_4 = 3$

Equazioni Irrazionali

Un'equazione è *irrazionale* se contiene almeno un radicale nel cui radicando compare l'incognita.

Ad esempio

$\sqrt{2x} - 4 = 3x$, è un'equazione irrazionale;
$4x - \sqrt{2} = 6$, non è un'equazione irrazionale.

Data un'equazione *A(x)=B(x)*, consideriamo l'equazione $[A(x)]^n = [B(x)]^n$:
- se *n è pari*, essa ha come soluzioni, oltre a quelle di *A(x)=B(x)*, anche quelle di *A(x)=-B(x)*;
- se *n è dispari*, essa è equivalente a quella data.

N.B.: Prova a risolvere la seguente equazione

$2x + 1 = x - 9$

e l'equazione

$(2x+1)^2 = (x-9)^2$

Si ottengono le stesse soluzioni? Le due equazioni sono equivalenti?

[La prima equazione dà come soluzione $x=-10$, la seconda invece $\begin{cases} x_1 = -10 \\ x_2 = \dfrac{8}{3} \end{cases}$]

Per risolvere un'equazione irrazionale

$$\sqrt[n]{A(x)} = B(x)$$

è necessario "liberarci" in qualche modo dei radicali presenti, per ricondurre il problema alla soluzione di una equazione razionale che ci dia buone informazioni sulle soluzioni dell'equazione iniziale. Per fare questo operativamente dobbiamo:

- • elevare a *n* entrambi i membri dell'equazione;
- • controllare se *n* è pari o dispari: se *n* è dispari, le soluzioni dell'equazione ottenuta sono *le stesse* dell'equazione irrazionale; se *n* è pari, possiamo eseguire il *controllo* delle soluzioni mediante *verifica*.

Esempio

$\sqrt{x^2+3x-6} = 2x-6$

Elevando entrambi i membri al quadrato e svolgendo i calcoli otteniamo:

$3x^2 - 24x + 36 = 0$

che ci dà come soluzione $x_1 = 7; \quad x_2 = 2$.

Questi valori saranno anche soluzione dell'equazione di partenza?

Per verificarlo sostituiamo 7 e 2 nell'equazione irrazionale data.

Sostituiamo *x=7*

Primo membro	**Secondo membro**
$\sqrt{49+21-6} = 8$	$2 \cdot 7 - 6 = 8$

Ora sostituiamo *x=2*

Primo membro	**Secondo membro**
$\sqrt{4+6-6} = 2$	$2(2) - 6 = -2$

Nel secondo caso, poiché i due membri dell'equazione non hanno lo stesso valore, la radice *x=2* non è soluzione dell'equazione irrazionale.