Disequazioni lineari in due variabili

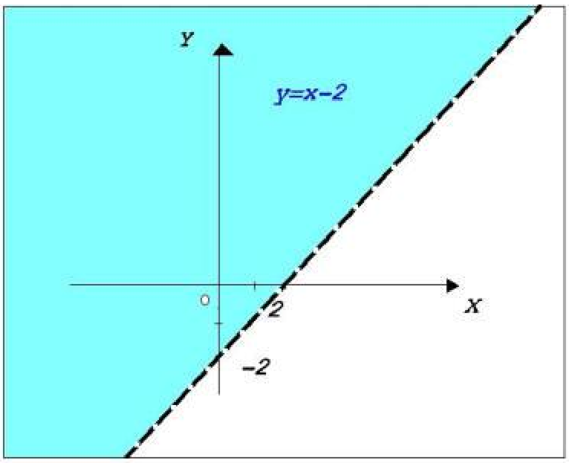
Una disequazione in due variabili è lineare se si può ridurre nella forma $ax+by+c >/< 0$ (con a e b non contemporaneamente nulli); cioè ad una funzione razionale intera nelle due variabili x e y di primo grado.
Le disequazioni in due variabili, in generale, possono essere interpretate nel piano cartesiano come *superfici* limitate dall'equazione della funzione associata alla disequazione data. Le disequazioni lineari, quindi, sono rappresentate da un semipiano tale che il suo margine è, ovviamente, la retta $ax+by+c = 0$ (retta frontiera), associata alla disequazione data.

Per determinare la soluzione di tale disequazione (una volta ridotta a forma normale) bisogna:

1. Esplicitare la disequazione $ax+by+c >/< 0$, rispetto alla y e otteniamo: $y >/< -\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ (cambiando i segni e il verso della disuguaglianza se il coefficiente di y è negativo.
2. Porre $-\frac{a}{b} = m$ e $-\frac{c}{b} = q$ e si ottiene $y >/< mx+q$.
3. Rappresentare la retta associata $y = mx+q$ nel piano cartesiano

Tale retta divide il piano cartesiano in due semipiani (uno dei quali contiene la soluzione);
   - se la retta non passa per l'origine, sostituire le coordinate dell'origine nella disequazione e verificare se la diseguaglianza è vera o falsa;
   - se la retta passa per l'origine, sostituire le coordinate di un punto di un semipiano nella disequazione e verificare se la diseguaglianza è vera o falsa.

4. La soluzione di una disequazione *lineare* in due variabili è rappresentata dai punti del semipiano che contiene o no il punto considerato, secondo se la diseguaglianza è vera o falsa, e da tutti i punti o no della retta origine del semipiano, secondo se la diseguaglianza è debole (< ; >) o forte (≤; ≥).



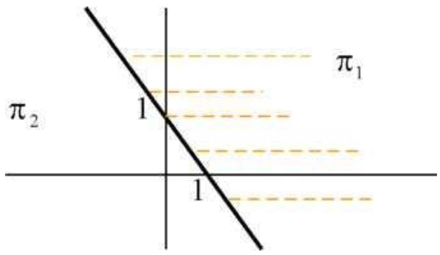
N.B. - Si può determinare in quale semipiano si trova la soluzione della disequazione (una volta scritta la stessa in forma esplicita) in modo più semplice: ovvero verificando in che posizione (in base alla disequazione) si trova l'asse delle y rispetto alla retta frontiera (sopra o sotto la retta). Ad esempio se la disequazione in forma esplicita è $y > x-2$, una volta disegnata la retta frontiera $y = x-2$, la soluzione della disequazione si troverà nel semipiano soprastante la retta indicata (parte di piano colorata in figura).

Esempi

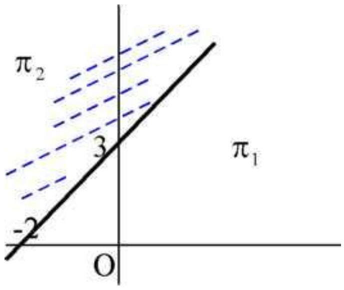
Rappresentiamo graficamente le soluzioni della disequazione di primo grado in due variabili

$x + y - 1 > 0$

Tracciamo sul piano cartesiano la retta di equazione $x + y - 1 = 0$
La retta divide il piano in due semipiani π_1 e π_2.



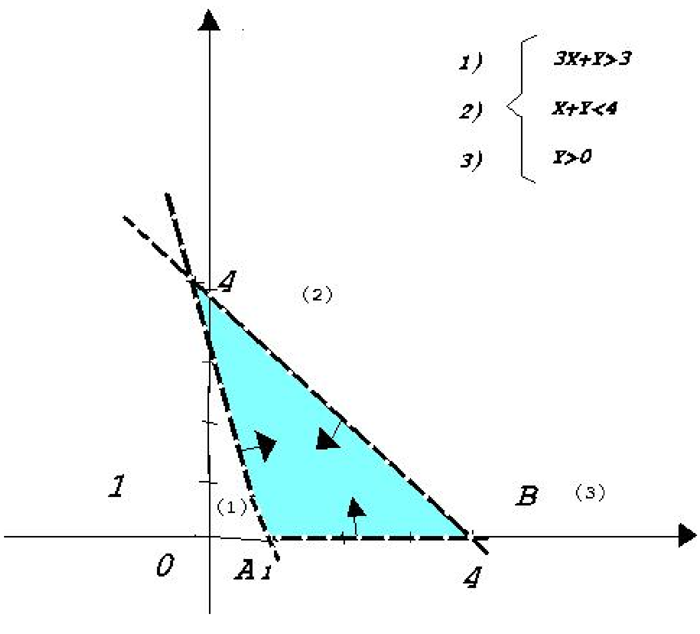
Le soluzioni sono rappresentate dai punti di uno di tali semipiani. Per decidere con facilità quale semipiano scegliere consideriamo un punto a piacere e verifichiamo se le sue coordinate soddisfano la disequazione assegnata. Nel nostro esempio, se scegliamo il punto P(2;1), che giace nel semipiano π_1, osserviamo che le sue coordinate soddisfano la disequazione data, infatti $2 + 1 - 1 > 0$. Le soluzioni sono quindi i punti appartenenti al semipiano π_1 .



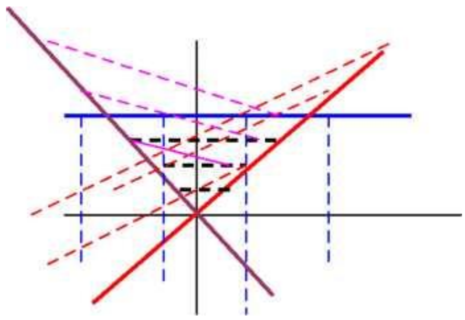
Nel caso invece della disequazione $3x - 2y + 6 < 0$, una volta rappresentata nel piano la retta frontiera, poiché le coordinate dell'origine 0(0; 0), che giace nel semipiano π_1, non soddisfano la disequazione data ($0 - 0 + 6 < 0$), le soluzioni sono rappresentate dai punti del semipiano π_2 che non contiene l'origine stessa.

Sistemi di disequazioni lineari in due variabili

Un sistema di disequazioni lineari in due variabili ha come soluzione le coppie di valori *(x ; y)* che soddisfano contemporaneamente tutte le disequazioni del sistema; ciò significa determinare la regione di piano (se esiste) formata da tutti i punti le cui coordinate *(x ; y)* soddisfano tutte le disequazioni del sistema. Per trovare la soluzione di un sistema, si risolvono separatamente tutte le disequazioni in esso presenti (col procedimento grafico visto in precedenza) e la soluzione del sistema è costituita dall'intersezione dei semipiani che soddisfano le singole disequazioni. Questa intersezione, se non è vuota, è costituita da un poligono convesso o da una regione illimitata convessa avente per contorno una spezzata chiusa o aperta (a seconda che le rette frontiera fanno o non fanno parte della soluzione), oppure può ridursi ad una retta o a un punto. I vertici del poligono o della regione illimitata si ricavano risolvendo i sistemi di equazioni ottenuti associando a due a due le equazioni delle rette che individuano i semipiani.



Consideriamo alcuni esempi:



1) Rappresentiamo graficamente le soluzioni del sistema $\begin{cases} y \leq 2 \\ x+y \geq 0 \\ y-x \geq 0 \end{cases}$

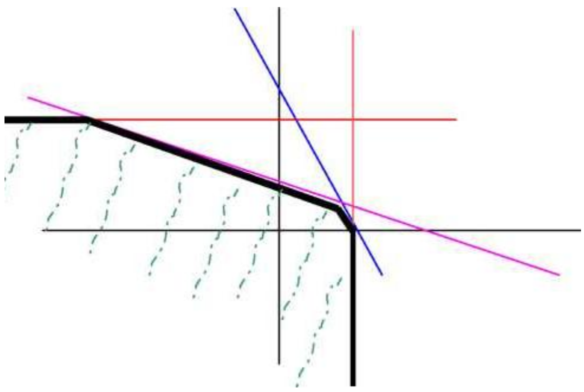
Tracciamo sul piano cartesiano le rette di equazioni: $\begin{cases} y=2 \\ y=-x \\ y=x \end{cases}$

E scopriamo che le soluzioni sono rappresentate dai punti appartenenti al triangolo ABC (zona tratteggiata in nero).

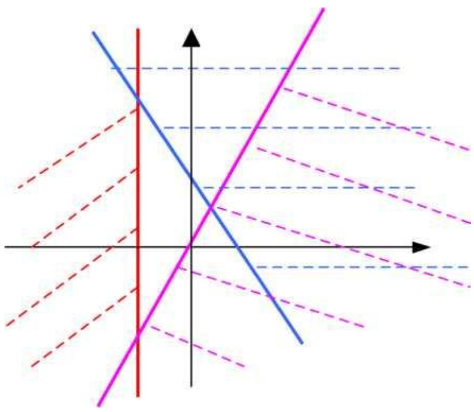
2) Rappresentiamo graficamente le soluzioni del sistema $\begin{cases} 2x+y \leq 6 \\ x+2y \leq 4 \\ y \leq 5 \\ x \leq 3 \end{cases}$

Per risolvere l'esercizio tracciamo sul piano cartesiano le rette frontiera di equazioni: $\begin{cases} 2x+y-6=0 \\ x+2y-4=0 \\ y=5 \\ x=3 \end{cases}$

Poiché le coordinate dell'origine soddisfano tutte le disequazioni del sistema, le soluzioni sono rappresentate dai punti appartenenti alla zona tratteggiata in verde.



3) Rappresentiamo graficamente le soluzioni del sistema $\begin{cases} x+2 \leq 0 \\ 3x+2y \geq 12 \\ 2x-y \geq 0 \end{cases}$



Con gli stessi procedimenti di prima, tracciamo le rette frontiera di equazione: $\begin{cases} x=-2 \\ 3x+2y-12=0 \\ 2x-y=0 \end{cases}$

Il sistema non ha soluzioni, infatti nessun punto del piano soddisfa tutte le disequazioni del sistema.